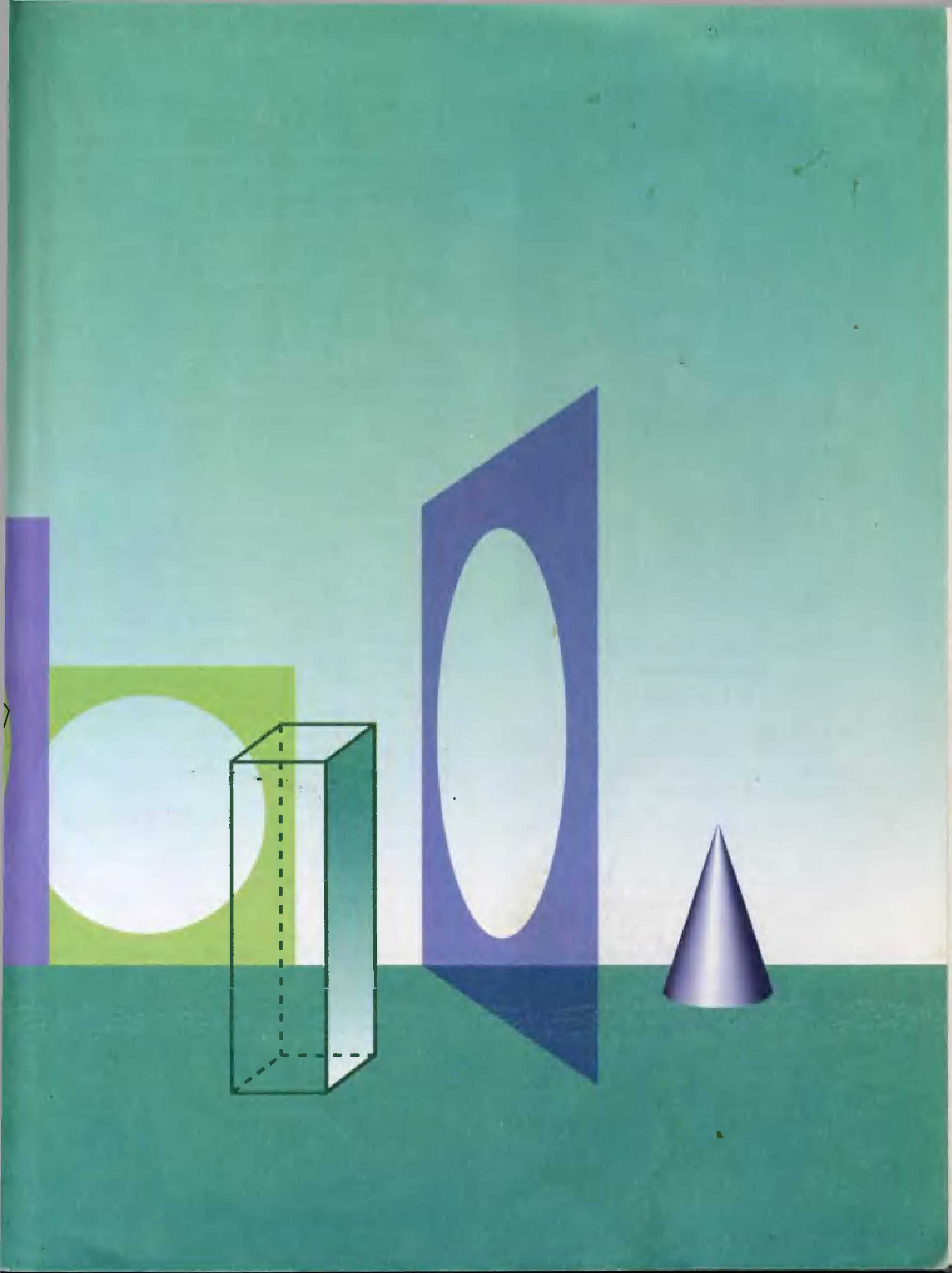
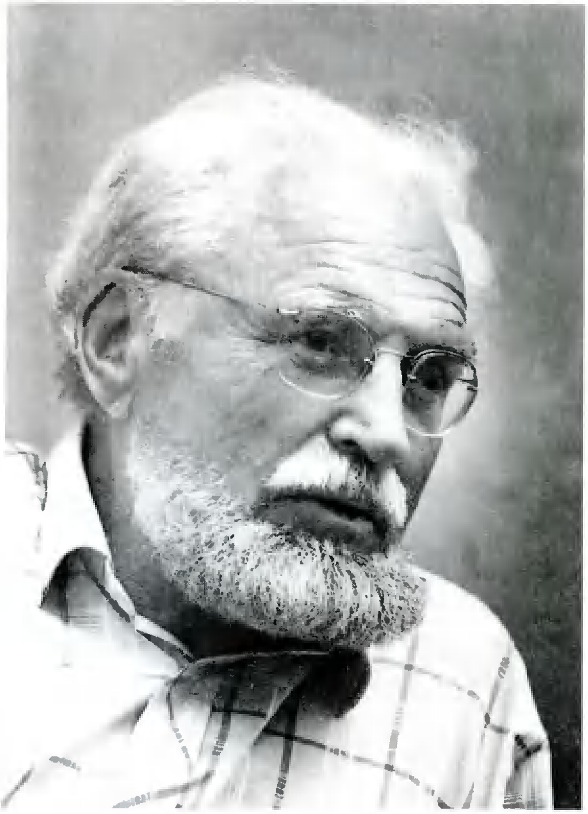
А. Д. Александров
А. Л. Вернер
В. И. Рыжик

ГЕОМЕТРИЯ

7-9

·Просвещение·





Александр Данилович Александров (1912—1999)

В 1961 году в газете «Комсомольская правда» в статье «Пусть будет больше одержимых», посвященной высшей школе, ректор Ленинградского университета Александр Данилович Александров написал знаменитую фразу: «*Студент — не сосуд, который надо наполнить, а светильник, который необходимо зажечь*».

Когда, спустя почти 20 лет, академик А. Д. Александров начал работать над школьным учебником геометрии, то в программной статье «О геометрии» он, споря с тем, что «образование состоит в наполнении человека знаниями», написал: «*Однако, по более глубокому пониманию, цель среднего образования состоит в том, чтобы дать человеку основные практические нужные знания и развить личность, развить духовно — в умственном и нравственном отношении (последнее и есть самое главное)*».

Мастер спорта по альпинизму и яркий публицист А. Д. Александров в газете «Советский спорт» в статье «Покори свою вершину» в 1985 году писал: «*Альпинизм (как и жизнь) — это не поклонение вершинам, а покорение вершин*».

А философ А. Д. Александров сказал: «*Поклоняться можно только истине*».

Личность Александра Даниловича Александрова была удивительно широка и многогранна. Ему покорились многие вершины и в науке, и в горах. Сын школьных учителей, Александр Данилович сам был всю свою жизнь Учителем. Вокруг него всегда собиралась талантливейшая молодежь. Сотни геометров в России и за ее пределами гордятся своей принадлежностью к александровской геометрической школе, которую во всем мире зовут «русской геометрией».

В общении с молодежью Александр Данилович был открыт, дружелюбен, всегда готов к спору и серьезному обсуждению проблем, волнующих молодежь. Его речь была яркой, волнующей, точной. Популярность Данилыча среди студентов и его учеников была необычайной. В студенческом фольклоре сохранилось немало доброжелательных историй и песен о Данилыче.

Свою увлеченность наукой и преклонение перед истиной Александр Данилович стремился передать молодежи в многочисленных публикациях в газетах и журналах. Даже заглавия его статей говорят об этом: «Вашу руку, коллега!», «Дорогу — увлеченным!», «Поэзия науки», «Ищите истину», «Восхождение к истине или горная геометрия» и многие другие.

Такие же задачи ставил А. Д. Александров (в статье «О геометрии») и перед школьным курсом геометрии. Он писал:

«Задача курса геометрии состоит в усвоении научного мировоззрения, в формировании его основы. Ее образуют безусловное уважение к установленной истине, требование доказывать то, что выдвигается в качестве истины, отказ от подмены доказательства верой или ссылкой на авторитет».

«В уважении к истине, в требовании доказательства заключается чрезвычайно важный нравственный момент. В простейшей, но очень важной форме он состоит в том, чтобы не судить без доказательств, не поддаваться впечатлениям, настроениям и наветам там, где нужно разобраться в фактах». И там же:

«Задача преподавания геометрии — развить у учащихся три качества: пространственное воображение, практическое понимание и логическое мышление.

Разумеется, одна из задач курса геометрии — дать учащимся основные понятия и умения в области геометрии. Однако все же главные, глубинные задачи преподавания геометрии заключены в трех указанных элементах, во-первых, ввиду их значения для общего развития, во-вторых, потому что они уже включают основное из тех знаний, которые должен давать курс геометрии».

А. Д. Александров
А. Л. Вернер
В. И. Рыжик

ГЕОМЕТРИЯ

Учебник для 7–9 классов

Допущено
Министерством образования
Российской Федерации

3-е издание, доработанное

Москва
•Просвещение•
2003

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72
А46

Александров А. Д.
А46 Геометрия : Учеб. для 7—9 кл. общеобразоват. учреждений / А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик. — 3-е изд., дораб. — М. : Просвещение, 2003. — 272 с. : ил. — ISBN 5-09-012215-6.

УДК 373.167.1:514
ББК 22.151я72

ISBN 5-09-012215-6

Дорогие семиклассники!

Шесть лет вы изучали математику. В этом курсе объединялись простейшие сведения из разных разделов: о действиях с числами (из арифметики), о решениях уравнений (из алгебры), о различных фигурах (из геометрии). С 7 класса курс математики делится на два предмета: алгебру и геометрию. Каждая из этих наук имеет свои особенности, свою историю.

Геометрия очень древняя наука, ей несколько тысяч лет. Имена древнегреческих геометров — Фалеса, Пифагора, Евклида, Архимеда — дошли до нас вместе с их замечательными открытиями (хотя жили эти ученые более 2000 лет тому назад).

Геометрия людям очень нужна, они пользуются ею постоянно: строя дома и прокладывая дороги, измеряя земельные участки и раскраивая одежду, производя астрономические измерения и изготовляя любую машину и т. п.

Геометрия сочетает в себе наглядность с точностью в рассуждениях. Изучая ее, вы сможете и увидеть красоту геометрического рисунка, и научиться логично рассуждать, и проявить сообразительность, и применять свои знания геометрии на практике.

В этом учебнике излагается планиметрия — та часть геометрии, в которой изучаются фигуры, расположенные в одной плоскости. В старших классах изучается стереометрия — часть геометрии о пространственных геометрических фигурах. Но о важнейших стереометрических понятиях мы кратко рассказываем во всех главах учебника и предлагаем несложные задачи. (В слове «планиметрия» два корня: латинский planum — плоскость и греческий metreo — измеряю. В слове «стереометрия» оба корня греческие. Греческое слово stereos означает «пространственный».)

Учебник делится на главы, главы делятся на параграфы, параграфы разбиты на пункты. Пункты имеют двойную нумерацию: например, п. 2.3 — это третий пункт из § 2.

В каждом параграфе сначала изложена теория. За нею следуют вопросы для самоконтроля. Они отмечены знаком . Ответив на них, вы сможете проверить, насколько вы поняли теорию.

Но этого мало. Надо еще научиться решать задачи. Задачи предложены к каждому параграфу и к большинству глав. Из задач к параграфу выделены основные задачи. На результаты, полученные в этих задачах, можно ссылаться как на сведения, полученные в теории. Они отмечены знаком . Перед группой задач к пункту стоит номер пункта, к которому относится эта группа задач. Например, знаком **2.3** отмечены задачи к пункту 2.3. Более трудные задачи отмечены значком . Решение некоторых задач приведено в тексте. Прежде чем разбираться в них по книге, постарайтесь решить их самостоятельно.

Кроме задач к параграфам, в которых проверяется ваше знание содержания именно этого параграфа, есть еще задачи к главам. Они труднее и требуют хороших знаний по всему предшествующему курсу геометрии.

Геометрию мы начинаем с изучения простейших фигур — отрезков, углов, треугольников. Вы знакомы с ними и с их обозначениями, а также и с некоторыми другими фигурами: квадратом, прямоугольником. Мы сразу будем опираться на ваши представления об этих фигурах (особенно при решении задач).

Мы будем рассказывать также и об истории геометрии. Чтобы вы лучше понимали роль геометрии в современной культуре, мы расскажем и о применениях геометрии в других науках, технике, искусстве и т. д. Эти сведения выделяются значками (начало) и (конец). Значком в теории отмечены более трудные места (для тех, кто особенно интересуется математикой).

Значками и отмечены начало и конец доказательства.

Если вы забудете определение какого-нибудь понятия, то посмотрите в конце книги в Предметном указателе, на какой странице вводится это понятие. Там оно будет выделено полужирным шрифтом.

Мы хотим, чтобы вам понравилась геометрия, и желаем успехов в ее изучении.

7 класс

I
ГЛАВА

Начала геометрии

В этой главе учебника будут изучаться давно знакомые вам простые геометрические фигуры: точки, отрезки, лучи, прямые, углы. Но теперь все ваши знания будут приведены в систему.

§ 1 О чем и зачем геометрия

Пифагор

1.1 **Геометрические фигуры.** В геометрии изучают форму и размеры предметов, не принимая во внимание другие их свойства: массу, цвет, твердость и т. д. Поэтому в геометрии вместо «предмет» говорят «фигура» или «геометрическая фигура».

Итак, **фигура** — это мысленный образ предмета, в котором сохраняются только его форма и размеры и только они принимаются во внимание.

Любой предмет можно рассматривать как фигуру. Например, тень от головы и скульптура (*рис. 1*) могут рассматриваться как фигуры: первая — плоская, вторая — пространственная.

Вы уже знаете некоторые геометрические фигуры: отрезок, квадрат, прямоугольник, круг, треугольник и др. (*рис. 2*). Все это **плоские** фигуры. На ***рисунке 3*** изображе-

Рис. 1

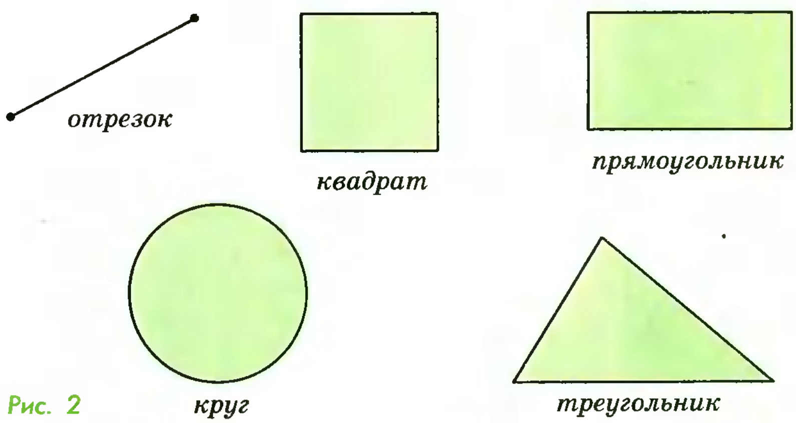


Рис. 2

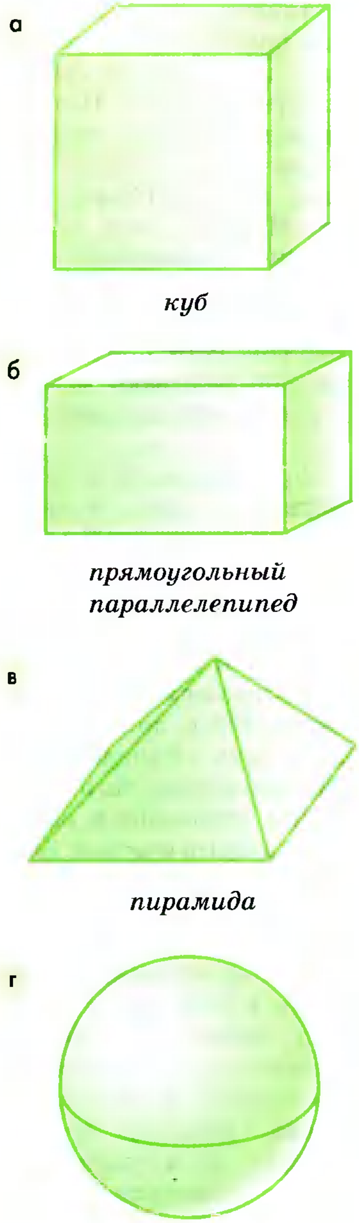


Рис. 3

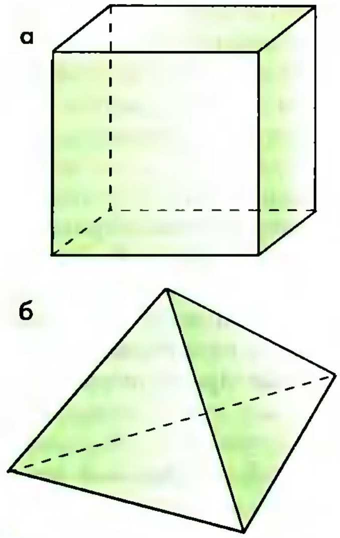


Рис. 4

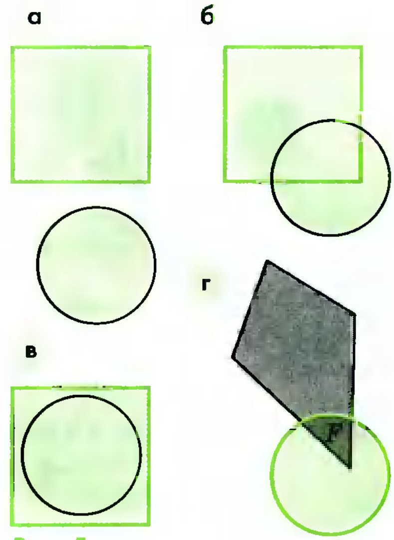


Рис. 5

ны **пространственные** фигуры: несколько многогранников — куб, прямоугольный параллелепипед, пирамида,а также шар. Многогранники ограничены многоугольниками, которые называются их гранями. Например, у куба шесть граней — шесть квадратов (*рис. 4, а*). Стороны граней многогранника называются его ребрами, а вершины граней — вершинами многогранника. Например, у куба двенадцать ребер и восемь вершин. Обратите внимание, что, изображая многогранники, рисуют все их ребра, но часть из них (невидимые ребра) рисуют штриховой линией (*рис. 4*).

Фигуры можно объединять: на ***рисунке 5, а — в*** фигура получается объединением круга и квадрата (для разных случаев взаимного расположения). **Объединение фигур** — это фигура, состоящая из всех точек данных фигур.

Общая часть двух фигур, или, как говорят, **пересечение** двух **фигур**, тоже фигура, как, например, на ***рисунке 5, г*** фигура *F*.

Любая часть фигуры тоже фигура.

В геометрии отвлекаются не только от свойств предметов, кроме формы и размеров, но частично и от самих размеров. Точки мыслятся как не имеющие никаких размеров, отрезки и любые линии — как не имеющие ни ширины, ни толщины, плоскость — как не имеющая толщины.

Геометрия — это наука о фигурах.

1.2 ◆ **Об истории геометрии.** Геометрия как практическая наука зародилась в Древнем Египте несколько тысяч лет тому назад. Первоначально она была набором правил, которые помогали измерять площади, объемы, решать задачи, возникавшие при сооружении оросительных каналов, грандиозных храмов, пирамид и т. п. Особенно важной была задача распределения земельных участков.

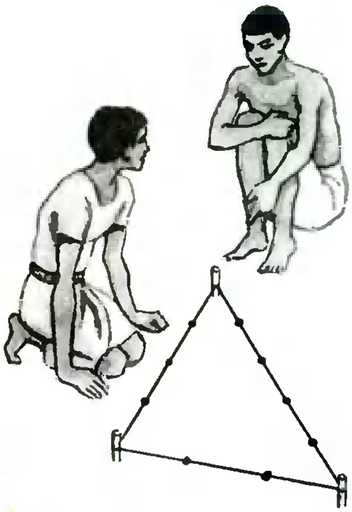


Рис. 6

Евклид

В Египте плодородная земля тянется узкой полоской в долине Нила, а за ее пределами простирается пустыня. Пригодной для земледелия земли было мало, и каждый ее клочок представлял собой большую ценность. Поэтому, когда ежегодно разливы Нила смывали границы участков, нужно было их восстанавливать как можно точнее. Этим занимались специальные землемеры, которые и были, можно сказать, первыми геометрами. Известно, что в своих геометрических построениях египтяне пользовались веревками. Например, они натягивали на колышки веревку с двенадцатью узелками и строили таким образом треугольник со сторонами 3, 4, 5, в котором есть прямой угол (*рис. 6*). Этот треугольник до сих пор называют «египетским треугольником» (а почему у него есть прямой угол, вы узнаете в восьмом классе).

Накопленные египтянами обширные знания о свойствах геометрических фигур заимствовали греки в период VII—V вв. до н. э. В Древнем Египте геометрия была сугубо прикладной наукой, а в Древней Греции она стала математической теорией. Имена великих геометров Древней Греции — **Фалеса, Пифагора, Евклида, Архимеда** и многих других — хорошо известны и в наши дни. Об одном из них — **Евклиде** — мы расскажем уже сейчас.

Евклид жил в Александрии около 300 г. до н. э. Славу Евклиду создал его собирательный труд «Начала». В 13 книгах «Начал» изложены основы геометрии того времени, а также геометрическим языком изложены и основы алгебры и теория чисел. Научные и педагогические достоинства «Начал» настолько велики, что это сочинение стало основным руководством по геометрии на две тысячи лет. Поэтому можно было бы назвать Евклида «величайшим школьным учителем во всей истории математики».

Важнейшее достоинство «Начал» в том, что в основу своих выводов Евклид положил несколько основных утверждений. Их называют постулатами и аксиомами. Слово «постулатум» — это латинский перевод греческого слова «требование». А греческое слово «аксиома» означает «предложение, достойное признания». И в самом деле, если и можно в чем-то сомневаться в геометрии, то только в постулатах. Все остальные ее результаты получены чисто логическим путем, а потому не могут подвергаться сомнениям. Будущее показало, насколько была верна такая позиция Евклида.

Постулатов у Евклида пять. В первых трех из них говорится о возможности простейших построений.

Постулат 1. **От всякой точки до всякой точки можно провести прямую линию.**

Постулат 2. **И ограниченную прямую (т. е. отрезок) можно непрерывно продолжить по прямой.**

Постулат 3. **И из всякого центра и всяким раствором может быть описан круг.**

В постулате 4 говорится о равенстве прямых углов. О постулате 5 мы скажем позднее.

В аксиомах у Евклида речь идет об общематематических положениях. Всего у Евклида девять аксиом. Приведем некоторые из них.

Аксиома 1. **Равные одному и тому же равны и между собой.**
Аксиома 2. **И если к равным прибавляются равные, то и целые будут равны.**
Аксиома 3. **И если от равных отнимаются равные, то остатки будут равны.**
Аксиома 5. **И удвоенные одного и того же равны между собой.**
Аксиома 6. **И половины одного и того же равны между собой.**
Аксиома 8. **И целое больше части.**

Опираясь на постулаты и аксиомы, Евклид затем выводит из них многочисленные предложения, т. е. теоремы, и решает задачи на построение фигур с заданными свойствами. Мы вслед за Евклидом будем опираться на эти и аналогичные им утверждения, а также сформулируем те положения, на которые опираются наши выводы. Все исходные положения в геометрии теперь называют аксиомами. Слово «постулат» сейчас в геометрии не применяют (хотя часто используют, например, в физике).

Роль Евклида в истории геометрии столь велика, что геометрию, основы которой он изложил в своих «Началах», стали называть евклидовой геометрией. Ее мы с вами и будем изучать.

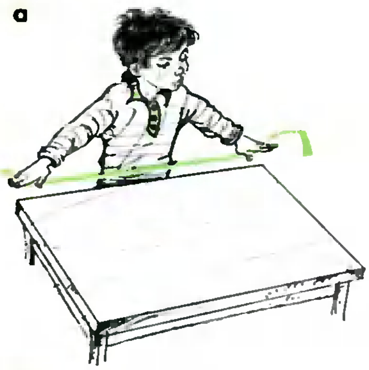
1.3 **Первые задачи геометрии. Построения.** Одна из задач геометрии состоит в сравнении фигур (на практике — в сравнении форм и размеров предметов). Сравнивая плоские предметы, выясняя, одинаковы ли они, часто накладывают их друг на друга. Так можно, например, сравнить два листа бумаги или два небольших стекла, приложив их друг к другу. Но как наложить друг на друга стекла для больших витрин?

Если наложить одно большое стекло на другое трудно, но возможно, то для стен домов или участков земли это вовсе не возможно. Поэтому их сравнение можно осуществить только сравнением некоторых размеров. При этом можно обойтись даже без рулеток и мерных линеек, одной бечевкой. Но что сравнить, чтобы убедиться, что два прямоугольных стекла одинаковы? Геометрия отвечает на этот вопрос: для этого достаточно сравнить две их соседние стороны. На практике так и поступают. Геометрия же обосновывает этот способ.

При сравнении размеров фигур их *измеряют*. Но само измерение тоже есть сравнение. Так, измеряя длину предмета, его сравнивают с образцом, который представляет единицу длины, например с метровой линейкой.

Рис. 7

а



б

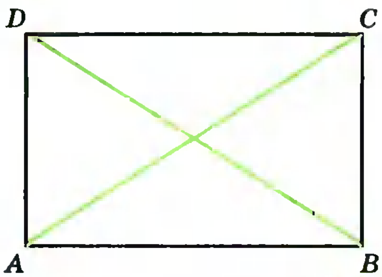


Рис. 8

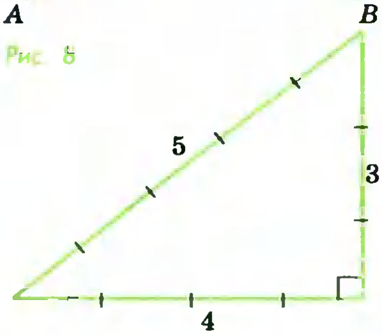


Рис. 9

Но чтобы иметь образец, надо его сделать. Поэтому другая задача геометрии — указать, как делать нужные по форме и размерам предметы. Какие размеры следует выдержать, чтобы получился нужный предмет? Такую задачу решают, когда делают разметку на заготовке для изготовления детали, выкройку для одежды и т. п. *(рис. 7)*.

В геометрии занимаются фигурами и говорят не о том, чтобы сделать фигуру, а о том, чтобы *построить* ее, говорят о геометрических построениях. Например, как построить равносторонний треугольник (т. е. такой треугольник, у которого все стороны равны), как построить квадрат, у которого сторона равна данному отрезку?

1.4 Другие задачи геометрии. Как, например, проверить, будет ли верхняя крышка стола прямоугольником? Плотник или столяр проверяет это, сравнивая с помощью бечевки противоположные края крышки, а также ее диагонали *(рис. 8, а)*. Если противоположные края оказываются одинаковой длины и длины диагоналей тоже одинаковы, то крышка стола прямоугольная — все ее углы прямые (**диагональ** четырехугольника — это отрезок, соединяющий противоположные вершины четырехугольника). Скажем это на языке геометрии: если у четырехугольника противоположные стороны равны, а также равны и диагонали, то он прямоугольник, т. е. все его углы прямые *(рис. 8, б)*. (Это утверждение мы докажем позднее. Оно замечательно тем, что из сравнения отрезков получаем вывод об углах.) Это примеры еще одной задачи геометрии: **по одним свойствам фигур делать вывод о других их свойствах.**

К этой же задаче геометрии относятся случаи, когда, измерив одни величины, делают вывод о других величинах: например, измерив длины, делают заключение об углах или площадях. Вспомним о «египетском треугольнике» со сторонами 3, 4, 5 *(рис. 9)*: один из углов треугольника прямой. Мы встретим много таких примеров.

Другую задачу геометрии представляет нахождение расстояний до недоступных предметов, а также определение их размеров и формы. Как определяют ширину реки, не пересекая ее? Как может артиллерист определить расстояние до цели? Ведь она ему недоступна! Как найти высоту дерева, к которому даже и подойти нельзя? Как определяют издали высоту гор? Как нашли расстояние до Луны и определили ее размеры? На все эти вопросы помогает ответить геометрия.

1.5 О значении геометрии. Все, что ни есть, находится в пространстве, все тела имеют какую-то форму и размеры, как-то взаимно расположены. Потому всюду — геометрия. Она — самая основная наука, наряду с арифметикой. С геометрией мы сталкиваемся в обыденной жизни: мы окружены геометрическими формами домов, комнат, мебели и нередко применяем простейшие выводы геометрии хотя бы в измерении площади жилищ.

На производстве, в технике геометрия применяется всегда, особенно когда нужно обеспечить точность форм и размеров. Для многих наук геометрия составляет основу. Скажем, в физике изучают законы движения тел. Но для того чтобы описывать движения одних тел по отношению к другим, нужно уметь определять взаимное положение тел, а это — задача геометрии. От строения химических соединений и взаимного расположения атомов в твердом теле до расположения небесных тел в безбрежном космическом пространстве — всюду геометрия.

Геометрия составляет также основу искусства, потому что изучает законы симметрии, законы перспективы, законы пропорций, а значит, основы законов красоты. Архитектура — это воплощенная в строительстве геометрия. Словом, все, что ни есть в мире, находится в пространстве, имеет свои формы, и люди сами их создают. И во всем этом — геометрия.

1. Какие вы знаете геометрические фигуры, не указанные на рисунках 2 и 3?
2. Какие задачи решает геометрия?
3. Что вы знаете об истории геометрии?

Задачи к §

1.1. Перерисуйте в тетрадь *рисунок 10*.
а) Какие фигуры получились в пересечении двух треугольников? Обведите их одним цветом.
б) Какие фигуры являются объединением двух треугольников? Обведите их другим цветом.
в) Нарисуйте сами два треугольника так, чтобы в пересечении получились фигуры, отличные от приведенных на *рисунке 10*. На сделанных вами рисунках выделите цветом как пересечение треугольников, так и их объединение.

1.2. Нарисуйте два прямоугольника так, чтобы их пересечением оказались: а) отрезок; б) прямоугольник; в) квадрат. Какие еще фигуры вы можете получить в их пересечении?

1.3. Нарисуйте два угла так, чтобы их пересечением оказались: а) общая вершина; б) точка; в) отрезок; г) луч; д) треугольник; е) четырехугольник; ж) угол.

1.4. Нарисуйте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. *рис. 4, а*).
1) Закрасьте разными цветами пересечение: а) нижней и правой граней; б) передней и верхней граней; в) передней, нижней и правой граней.
2) Пересечением каких граней является: а) ребро CD; б) ребро BB_1; в) вершина C_1?

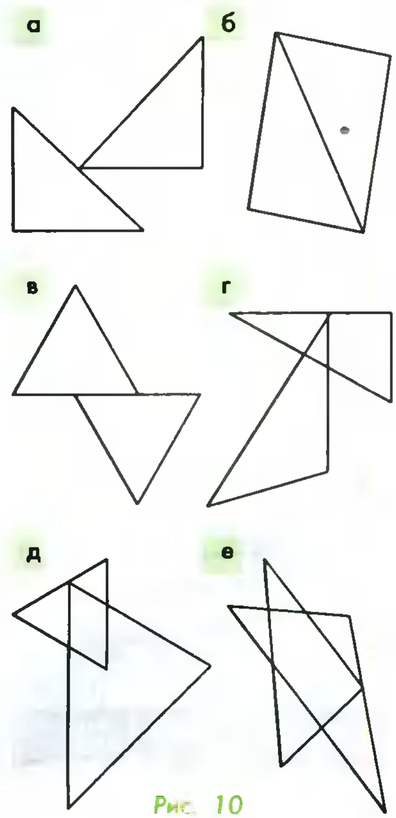


Рис. 10

1.5. Нарисуйте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Выделите цветом объединение: а) ребер BA и BC; б) ребер A_1D_1, D_1C_1 и CC_1; в) верхней и задней граней; г) левой, нижней и правой граней; д) какого-либо ребра и грани, имеющей с этим ребром лишь общую вершину.

1.6. Как в объединении двух одинаковых кубов получить прямоугольный параллелепипед? Сделайте рисунок.

1.7. Как в пересечении двух кубов получить: а) прямоугольник; б) квадрат; в) прямоугольный параллелепипед; г) куб; д) пирамиду?

§ 2 Отрезок. Луч. Прямая

2.1 **Отрезок.** Мы начинаем изучение геометрии с рассмотрения простейших фигур. Самая простая фигура — **точка**. Точки обозначают прописными латинскими буквами: A, B, C, ... **Каждые две точки соединяет отрезок, и притом только один.** Отрезок, соединяющий две точки A и B, будем обозначать AB или BA (*рис. 11, а*). Точки A и B называются **концами** отрезка AB. Отрезки можно обозначать и одной строчной латинской буквой: a, b, c, ... Отрезки проводят по линейке (*рис. 11, б*) или вдоль натянутой веревки (вспомните о египетских «веревковязателях») (*рис. 12*).

О точках отрезка, не являющихся его концами, говорят, что они лежат внутри отрезка или что они являются **внутренними** точками отрезка. Например, точка C на *рисунке 13* лежит внутри отрезка AB. В этом случае говорят и так: точка C **лежит между** точками A и B. Это же можно сказать иначе: **отрезок AB проходит через точку C.**

Если точка C лежит внутри отрезка AB, то она делит его на отрезки AC и CB, или, как еще говорят, **разбивает AB на отрезки AC и CB.** В этом случае отрезок AB яв-

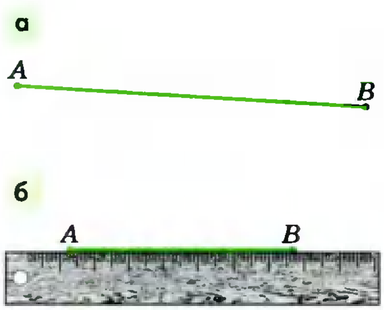


Рис. 11

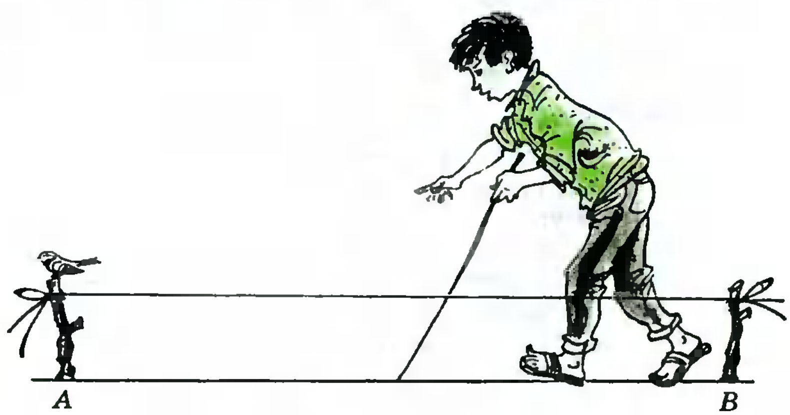


Рис. 12

Рис. 13

ляется объединением отрезков AC и CB, а точка C — единственная общая точка отрезков AC и CB.

Если два отрезка имеют две общие точки, то их объединением является отрезок (рис. 14, а). Это утверждение говорит о том, что если через две точки провести несколько отрезков, то они вместе образуют один отрезок (рис. 14, б). Практический пример: соединив двумя болтами две рейки, получим более длинную рейку (рис. 15).

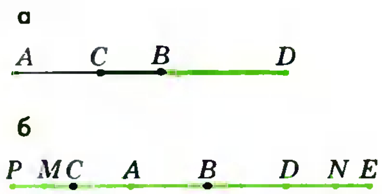


Рис. 14

2.2 **Луч.** Содержание предыдущего пункта связано с первым постулатом Евклида. Во втором постулате Евклида говорится о возможности продолжения отрезка по прямой (см. с. 8). Такое построение приходится выполнять, если линейка короткая, а начертить надо длинный отрезок на большом листе бумаги или на классной доске. Продолжают отрезки при проведении больших отрезков на местности с помощью приема, который называется **провешиванием прямой**. В исходной точке A один человек ставит первую веху (длинный шест, палку) и смотрит в том направлении, в котором надо провести отрезок. Другой человек ставит в том же направлении следующую веху в какой-то точке B (рис. 16). Потом он же ставит третью веху в некоторой точке C так, чтобы вторая веха закрывала третью от взгляда первого человека. В этом случае отрезок AC получается продолжением отрезка AB за точку B, а отрезок AB является частью отрезка AC. Затем это построение можно продолжать дальше за точку C и т. д. Таким способом построения отрезков на местности часто пользуются геодезисты, да и просто люди, которым надо огородить большой участок земли.

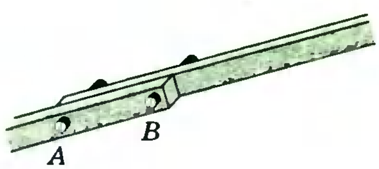


Рис. 15

Если же мысленно представить себе неограниченное продолжение отрезка AB за точку B, то в результате получим **луч** AB с началом в точке A, идущий через точку B (рис. 17, а).

Эти наглядные представления с помощью знакомых нам терминов можно описать так: **луч AB — это объединение всех отрезков AM, содержащих точку B (рис. 17, б).**

Вспомните, что слово *луч* мы употребляем, говоря «солнечный луч», «луч прожектора», «луч лазера» и т. п.

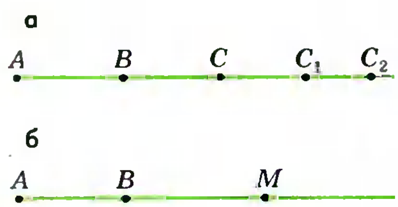


Рис. 17

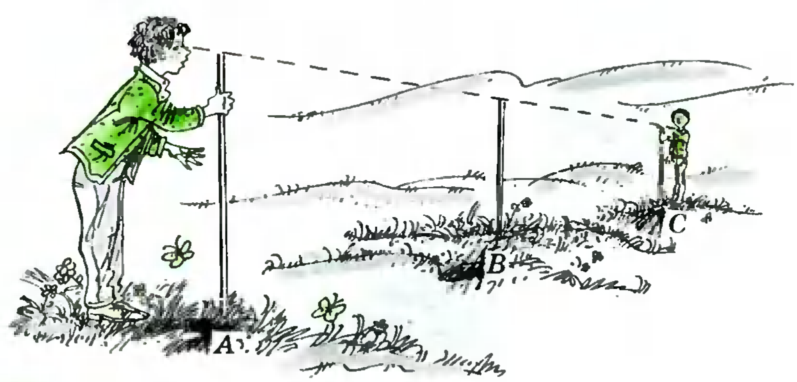


Рис. 16

Рис. 18

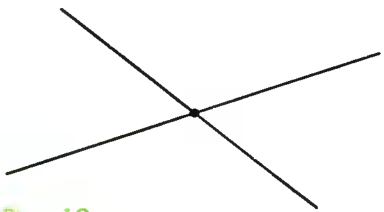


Рис. 19

Рис. 20

2.3 **Прямая.** Мы получили луч, мысленно неограниченно продолжая отрезок за один из его концов. Если же мысленно неограниченно продолжать отрезок за оба его конца, то получим **прямую** (*рис. 18*). Можно сказать так: **прямая** ***AB*** **— это объединение всех отрезков, содержащих точки *A* и *B*.**

Всякая прямая задается любыми двумя своими точками, а именно **через каждые две точки проходит прямая, и притом только одна.**

Поэтому две прямые могут иметь не больше чем одну общую точку. Если две прямые имеют общую точку, то они называются **пересекающимися**, а их общая точка называется их точкой пересечения (*рис. 19*).

Каждая точка, лежащая на прямой, разбивает эту прямую на два луча, имеющие эту точку своим началом (*рис. 20*). Поэтому луч называют также **полупрямой**.

Каждая прямая, лежащая на плоскости, разбивает эту плоскость на две **полуплоскости** (*рис. 21, а*). Для обеих полуплоскостей эта прямая называется граничной прямой или, короче, **границей**. Граничную прямую относят к каждой из полуплоскостей.

О двух точках, лежащих в одной полуплоскости (но не на граничной прямой), говорят, что они лежат по одну сторону от ее границы (*рис. 21, б*). В таком случае отрезок, соединяющий эти точки, не пересекает границу полуплоскости (*рис. 21, в*).

О двух точках плоскости, лежащих в разных ее полуплоскостях с общей границей (но не на их границе), говорят, что они лежат по разные стороны от этой границы (*рис. 21, г*). Отрезок, соединяющий эти точки, пересекает общую границу полуплоскостей (*рис. 21, д*).

2.4 **О происхождении понятий «плоскость», «прямая», «точка».** Среди геометрических фигур плоскости и прямые играют особую роль. Плоскости и прямые — неограниченные фигуры. Поэтому если мы говорим, что лист бумаги имеет форму прямоугольника, а кирпич — форму прямоугольного параллелепипеда, то таких реальных предметов, о которых можно сказать, что они имеют форму плоскости или форму прямой, не существует. (Строго говоря, нельзя нарисовать прямую.) Как пришли к понятиям плоскости и прямой, мы попытаемся пояснить.

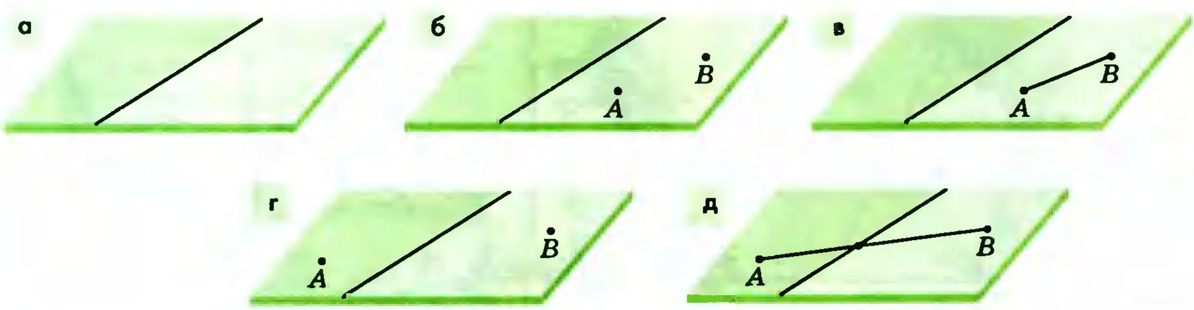


Рис. 21

Рис. 22

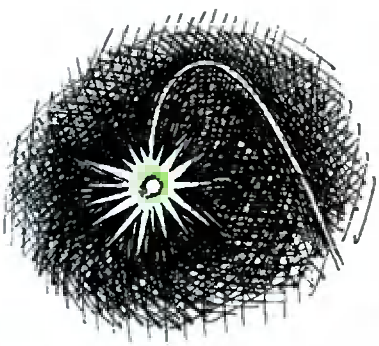


Рис. 23

Каждый реальный предмет имеет протяженность в пространстве. Обычно говорят о протяженности в трех направлениях: в длину, ширину и высоту. Но случается так, что нас интересуют только две величины: длина и ширина. Высота (толщина) нас может не интересовать. Например, вам в данный момент не интересна толщина тетрадного листа. В тех случаях, когда мы отвлекаемся от высоты реального предмета, то называем его плоским. Размышляя о плоских предметах, представляя их неограниченными, геометры пришли к понятию плоскости. Наглядное представление о плоскости можно получить, разглядывая поверхность стола, стены и т. д. и воображая их неограниченно продолженными во все стороны.

На практике проверить, что поверхность какого-то предмета плоская, можно с помощью линейки: если, прикладывая линейку к поверхности во всевозможных направлениях, мы нигде не получим зазора, значит, поверхность плоская (*рис. 22*).

Может случиться так, что нас не будет интересовать ни высота, ни ширина реального предмета. Например, когда мы отправляемся в дорогу, то нас интересует ее длина, но отнюдь не ширина. Мысленным образом реального предмета, в котором нас интересует только длина, является линия. Наглядное представление о линии можно получить, разглядывая кусок проволоки. Линию рисует карандаш (если его не отрывают от бумаги), или конек фигуриста (не отрывающийся ото льда), или светящаяся ракета во время фейерверка (*рис. 23*), или планеты и звезды при движении по небесной сфере и т. д. Самой простой и основной линией является отрезок. Размышляя об отрезках, представляя их неограниченными, геометры пришли к понятию прямой. Наглядное представление о прямой можно получить, глядя на линию горизонта или на уходящий в обе стороны рельс железной дороги.

И наконец, нас может не интересовать даже и длина реального предмета, а не только его высота и ширина. Например, когда мы говорим о расстоянии между звездами, то пренебрегаем всеми размерами звезды, хотя они и громадны. Размышляя о таких реальных предметах, размерами которых можно пренебречь, геометры пришли к понятию точки. Наглядное представление о точке можно получить, глядя на след от ножки циркуля на листе бумаги.

1. Какая разница между лучом и прямой?
2. Сколько прямых можно провести через две точки?
3. Какие прямые называются пересекающимися?
4. Как на земле начертить отрезок?

Задачи к § 2

2.1 **2.1.** Нарисуйте две точки. Соедините их какой-нибудь линией. Потом еще одной. И еще одной. Как вы думаете, сколькими линиями их можно соединить? А сколько отрезков соединяют эти две точки?

2.2. Нарисуйте отрезок AB. Внутри его отметьте точку C. На какие отрезки разбит отрезок AB? Внутри отрезка AC отметьте точку D. На какие отрезки разбиты отрезки AC, BD, AB?

2.3. Нарисуйте отрезок AB, а внутри его точку C. О том, что вы видите на рисунке, скажите, используя такие слова: пересечение, объединение, разбиение, продолжение.

2.4. а) Нарисуйте треугольник ABC. Продолжите его стороны: AB за точку B, BC за точку C, CA за точку A. Концы полученных отрезков соедините отрезками между собой. Какая получилась фигура?

б) Нарисуйте треугольник. Каждую из его сторон продолжите за оба конца. Концы полученных отрезков соедините последовательно отрезками. Какая фигура получилась?

в) Какие получатся фигуры, если выполнить такую же работу, как в задачах а) и б), но уже для четырехугольника?

2.5. а) Нарисуйте четырехугольник с непараллельными сторонами. Продолжите его противоположные стороны до взаимного пересечения. Выделите цветом полученную фигуру.

б) Нарисуйте пятиугольник. Его стороны, идущие через одну, продолжите до взаимного пересечения. Выделите цветом полученную фигуру.

в) Если вы сделали удачный рисунок в задаче б), то у вас получилась пятиконечная звезда. Какие звезды вам удастся получить из других многоугольников, действуя таким же образом?

2.2 **2.6.** Нарисуйте отрезок AB. Нарисуйте луч AB. Нарисуйте луч BA. Какой фигурой является пересечение этих лучей?

2.7. Нарисуйте луч AB. Отметьте на нем точку C. Сколько лучей на этом рисунке имеют начала в отмеченных точках? Какая фигура является их пересечением?

2.8. Нарисуйте отрезок BC и точку A вне его. Нарисуйте луч с началом в точке A, проходящий через какую-либо точку отрезка BC. Сделайте так несколько раз. Нарисуйте фигуру, которая получится, если провести все такие лучи.

2.3 **2.9.** Нарисуйте отрезок AB. Нарисуйте прямую AB. Сколько лучей на этом рисунке, имеющих начало в точках A и B? Какая фигура является объединением лучей AB и BA?

2.10. а) Нарисуйте три точки, не лежащие на одной прямой. Сколько прямых можно провести через эти точки?

б) Нарисуйте четыре точки, из которых любые три не лежат на одной прямой. Сколько прямых можно провести через эти точки?

в) Какие еще возможны расположения четырех точек? Сколько прямых можно будет через них провести при этих расположениях?

2.11. Нарисуйте треугольник.

а) Внутри его отметьте точку и проведите через нее прямую. На сколько частей разбился треугольник?

б) Внутри его возьмите еще точку и через нее проведите другую прямую. На сколько частей разбился треугольник этими двумя прямыми? Будьте внимательны: при ответе на этот вопрос в зависимости от положения прямых будут разные результаты.

в) Вам понадобилось разрезать круглый торт на шесть частей. Сколько вы сделаете прямолинейных разрезов? Можно ли уменьшить их число?

2.12. Сколько вершин и ребер: а) у прямоугольного параллелепипеда *(рис. 3, б)*; б) у треугольной пирамиды *(рис. 4, б)*; в) у четырехугольной пирамиды *(рис. 3, в)*?

2.13. Нарисуйте треугольную пирамиду $ABCD$ с вершинами A, B, C, D. Треугольную пирамиду называют также **тетраэдром**, что в переводе с греческого означает «четырехгранник».

2.14. Нарисуйте многогранник, у которого: а) 8 ребер; б) 9 ребер.

2.15. Сколько граней куба может осветить прожектор, находящийся вне куба?

§ 3 Действия над отрезками

Рис. 24

3.1 Равенство отрезков. Откладывание отрезков. Сравнивая длины двух предметов, их часто прикладывают друг к другу или кладут один на другой. Если их концы при этом совпадают, то предметы равны по длине *(рис. 24)*. Отвлекаясь от толщины таких предметов и других их свойств, представляем их себе как отрезки и говорим: «Два отрезка равны, если один из них можно наложить на другой так, чтобы они совпали».

Равенство отрезков AB и CD обозначают так: $AB=CD$.

На рисунках равные отрезки отмечаются одинаковым числом поперечных черточек *(рис. 25)*.

Но не всегда предметы можно сравнивать, прикладывая их друг к другу. Невозможно, например, приложить друг к другу два края одного стола. Что делать в этом случае? Их можно сравнить с третьим предметом, лучше всего с линейкой, но можно обойтись бечевкой и т. п. И если окажется, что длины двух предметов равны длине третьего предмета, то их длины равны. Как сказано в первой аксиоме Евклида, равные одному и тому же равны и между собой. Для отрезков эта аксиома говорит о таком свойстве равенства отрезков:

Аксиома *(сравнения отрезков)* **Два отрезка, равные третьему, равны.**

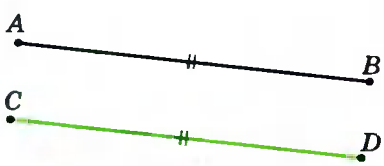


Рис. 25

Как получить отрезки, равные данному? Такую задачу часто приходится решать для реальных предметов: например, заготовить одинаковые доски, трубы и т. п. Во всех таких случаях от длинных предметов отпиливаются, отрезаются предметы нужной длины *(рис. 26)*. А для этого к длинному предмету (например, к доске) прикладывают предмет нужной длины и смотрят, чтобы их начала совпали.

Если от предметов снова перейти к отрезкам, то придем к следующему построению равных отрезков. Пусть заданы луч a с началом A и отрезок CD. **Отложить на луче a от точки A отрезок, равный отрезку CD,** — это значит указать на луче a такую точку B, что отрезок AB будет равен CD (рис. 27). Это построение можно себе представить так: CD как бы переносится на луч a, причем одним из его концов становится точка A. О возможности построения говорится в аксиоме откладывания отрезка.

Рис. 26

Аксиома (откладывания отрезка) **На каждом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному, и притом только один.**

Откладывать отрезки, равные заданным отрезкам, мы будем с помощью циркуля.

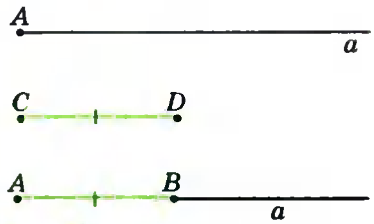


Рис. 27

3.2 Сравнение отрезков. Вспомните, как вы меряетесь ростом (рис. 28). Примерно так же сравнивают два любых отрезка.

Рис. 28

Возьмем два отрезка a и b. Отложим равные им отрезки на одном луче от его начала O. Получим отрезки $OA=a$ и $OB=b$ (рис. 29).

Возможны три случая положения точек A и B:

1. Точки A и B совпадут (рис. 30, а). Тогда OA и OB — это один отрезок, а отрезки a и b равны ему. Значит, по аксиоме сравнения отрезков они равны: $a=b$.

2. Точка B лежит внутри OA (рис. 30, б). Тогда говорят, что **отрезок b меньше отрезка a** (или, что то же самое, что **отрезок a больше отрезка b**).

Обозначается это так: $b<a$ $(a>b)$.

3. Точка A лежит внутри отрезка OB (рис. 30, в). Тогда говорят, что отрезок a меньше отрезка b (или что b больше a).

Обозначения: $a<b$ $(b>a)$.

3.3 Сложение и вычитание отрезков. На практике часто приходится «складывать отрезки». Например, когда кладут рельсы железной дороги, сваривают трубы газопровода и т. п. (рис. 31). Такие реальные «отрезки» последовательно прикладывают друг к другу, составляя из них один «отрезок». Соответственно в теории отрезки складываются так.

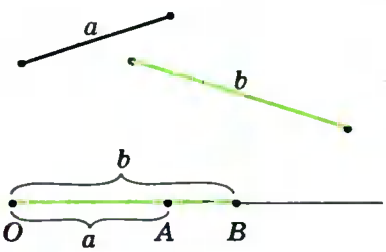


Рис. 29

Пусть даны, например, три отрезка a, b, c (рис. 32, а). Возьмем луч l с началом O (рис. 32, б). Отложим на луче l от точки O отрезок $OA=a$, затем в ту же сторону отложим отрезок $AB=b$ и, наконец, в ту же сторону отложим отрезок $BC=c$. Такое построение называется **сложением отрезков** a, b, c. Сами отрезки a, b, c называются слагаемыми, а полученный отрезок OC называется их **суммой**. Говорят, что **отрезок OC составлен из отрезков OA, AB, BC.**

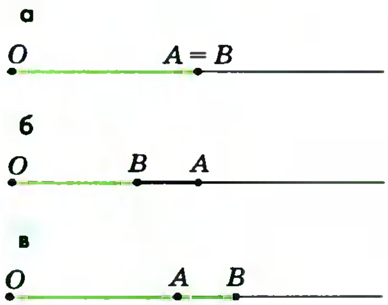


Рис. 30

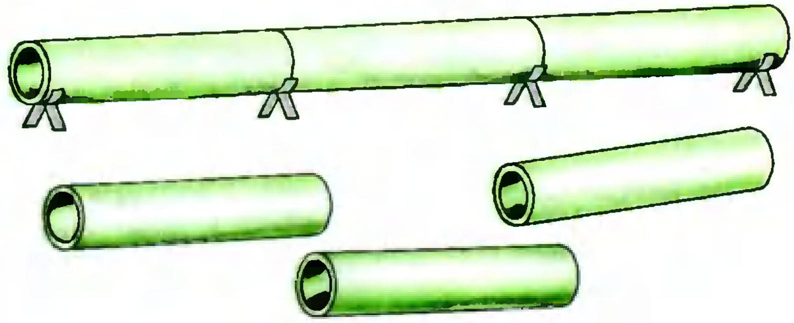


Рис. 31

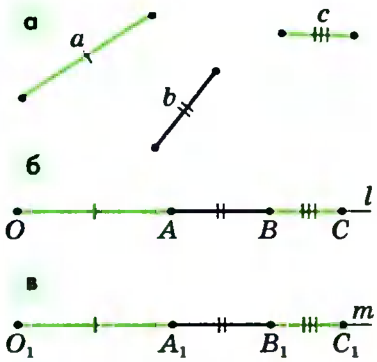


Рис. 32

Пишут: $OC=OA+AB+BC$ или $OC=a+b+c$.

При сложении отрезков a, b, c мы брали некоторый луч l. А если взять другой луч m и на нем построить сумму отрезков a, b, c, отложив $O_1A_1=a$, $A_1B_1=b$, $B_1C_1=c$ (рис. 32, в)? Мы получим в сумме отрезок O_1C_1. Будет ли он равен OC? Да, будет!

Как говорится во второй аксиоме Евклида, и если к равным прибавляются равные, то и целые будут равны. Для отрезков эта аксиома говорит о таком *свойстве сложения отрезков*: **отрезки, составленные из соответственных равных отрезков, равны.**

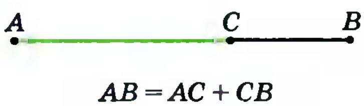


Рис. 33

Рассмотрим **рисунок 33**. На нем точка C разбивает отрезок AB на отрезки AC и CB. Сейчас мы можем записать, что $AB=AC+CB$.

Часто приходится складывать равные отрезки. Например, если отрезок $p=a+a+a$, то пишут: $p=3a$. Вообще если складывают n отрезков, равных отрезку a, то их сумма

$$\underbrace{a+a+\ldots+a}_{n\ \text{раз}}=na.$$

Отрезки, как и числа, можно не только складывать, но и вычитать. **Разность отрезков** a и b — это такой отрезок c, что $c+b=a$.

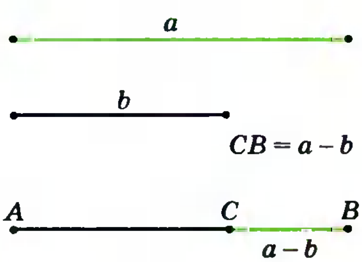


Рис. 34

Разность отрезков a и b можно найти так. На отрезке AB, равном данному отрезку a, откладываем отрезок AC, равный отрезку b. Отрезок CB и будет разностью $a-b$ (рис. 34).

Понятно, чтобы отрезок b можно было вычесть из отрезка a, надо, чтобы b можно было отложить на a, т. е. чтобы отрезок b был меньше отрезка a.

3.4 Деление отрезка на равные части. Посмотрите на вашу линейку с делениями: она разделена на равные отрезки. Например, линейка в 25 см разделена на 25 равных отрезков длиной 1 см. Каждый из этих отрезков равен $\frac{1}{25}$ всей линейки.

Вообще если в отрезке b отрезок a укладывается n раз, то $b=na$ и $a=\frac{1}{n}b$.

1. Какие аксиомы вы узнали из этого параграфа?
2. Как можно сравнить два отрезка?
3. Как сложить два отрезка?
4. Как вычесть отрезок из отрезка? Всегда ли это можно?
5. Даны отрезки a и b. Как можно иначе записать такое равенство: $a = 3b$? а такое: $a = 0{,}5\ b$?

Задачи к § 3

3.1 **3.1.** Нарисуйте отрезок и точку O вне его. Из O проведите два луча, не лежащие на одной прямой. На каждом из них от O отложите отрезки, равные данному. Их концы соедините отрезком. Объясните, почему в полученном треугольнике две стороны равны.

3.2. а) Нарисуйте прямую. Нарисуйте отрезок, не лежащий на ней. Отметьте точку A на прямой. На каждом из полученных лучей от точки A отложите отрезок, равный данному. Назовем их концы B и C. Как называется точка A по отношению к отрезку BC?
б) Как вы определите, что такое середина отрезка?
в) Пусть три точки A, B, C расположены так, что $AB = BC$. Является ли точка B серединой отрезка AC?

3.3. Нарисуйтете отрезок AB и точку O вне прямой AB.
а) Отметьте точку K на AB, проведите отрезок OK и продолжите OK за точку K на отрезок, равный OK. Проделайте построение с несколькими точками AB. Что вы заметили? При этом сделайте такое построение для точек A и B.
б) Проделайте такую же работу, что и в задаче а), взяв вместо отрезка AB прямую AB.
в) Отметьте на AB точку K, соедините ее отрезком с точкой O и продолжите этот отрезок за O на равный ему. Так сделайте с несколькими точками AB. Что вы заметили?
г) Вместо отрезка возьмите прямую AB и сделайте те же наблюдения (см. задачу в)).

3.2 **3.4.** Нарисуйте любые два отрезка. Вам надо сравнить их. Как вы будете действовать? При этом постарайтесь обойтись меньшим числом построений.

3.5. Пусть точка C — середина отрезка AB.
а) Возьмите точку X внутри BC. Объясните, почему $AX > AC$.
б) Возьмите точку Y внутри AC. Объясните, почему $BY > BC$.

3.6. Нарисуйте отрезок a.
а) Нарисуйте луч с началом в точке A. Какую фигуру образуют на нем такие точки X, что $AX \leqslant a$, $AX \geqslant a$?
б) Нарисуйте прямую. Отметьте на ней точку A. Ответьте для прямой на те же вопросы, что и в задаче а).

3.7. Нарисуйте два отрезка a и b, причем $b > a$.
а) Нарисуйте луч с началом в точке A. Какую фигуру образуют на нем такие точки X, что $a \leqslant AX \leqslant b$?
б) Нарисуйте прямую. Отметьте на ней точку A. Ответьте для прямой на те же вопросы, что и в задаче а).

3.3 **3.8.** Нарисуйте два неравных отрезка. Постройте их сумму и разность.

3.9. Нарисуйте квадрат. Проведите в нем диагональ (отрезок, соединяющий противоположные вершины). Обозначьте его сторону a и диагональ b. Постройте такие отрезки: а) $a + b$; б) $b - a$; в) $2a + b$. Можно ли построить такие отрезки: $2a - b$, $3b - 5a$?

3.10. Нарисуйте отрезок AB.
а) Отложите на нем два равных отрезка AC и BD. Докажите, что $AD=BC$. (Будьте внимательны: доказательство может зависеть от того, в каком порядке расположены точки A, B, C, D.)
б) Отложите на прямой AB вне отрезка AB два равных отрезка AC и BD. Докажите, что $AD=BC$.

3.11. Нарисуйте отрезок AB и его середину C. Пусть точка X лежит внутри AC, а точка Y лежит внутри BC. Докажите, что: а) если $CX=CY$, то $AX=BY$; б) если $AX=BY$, то $CX=CY$. Будут ли верны эти утверждения, если точки X и Y лежат соответственно на лучах CA и CB вне AB?

3.12. Федя нарисовал на доске два отрезка, а потом построил их сумму и разность. Пришел Вася, стер два исходных отрезка, а сумму и разность оставил. Сможете ли вы помочь Феде восстановить исходные отрезки?

3.13. Сколько равных друг другу ребер может быть у прямоугольного параллелепипеда?

3.14. Как из шести спичек сложить 4 равных треугольника?

§ 4 Длина отрезка. Расстояние

4.1 Понятие длины отрезка. Расстояние. От геометрических величин — длины, расстояния, угла, площади, объема зависят форма и размеры фигур. Измерение геометрических величин является одной из важнейших задач геометрии.

Первая и самая важная из геометрических величин — длина отрезка. Она характеризует его протяженность. Измерять длину постоянно приходится на практике. Длина используется при вычислениях других геометрических величин — углов, площадей, объемов. Например, зная длины сторон прямоугольника, можно вычислить его площадь. Измеряя длину, опираются на два основных ее свойства:

1. Длины равных отрезков равны.
2. При сложении отрезков их длины складываются.

Например, длина газопровода равна сумме длин всех его труб.

Длину отрезка называют также **расстоянием** между его концами. Иначе говоря, **расстояние между двумя точками — это длина соединяющего их отрезка.**

4.2 Численное значение длины отрезка. Вам хорошо известно, что для измерения длины сначала надо выбрать **единичный отрезок**, например 1 см, 1 м, 1 км и т. д. За основную единицу длины в физике и технике принят метр. (Вообще говоря, единичным отрезком можно взять любой отрезок.)

После того как выбран единичный отрезок, длина каждого отрезка выражается положительным числом. Это число называется **численным значением длины.** Оно показывает, сколько раз единичный отрезок и его доли укладываются в данном отрезке. Так, если отрезок длиной 1 см укладывается в AB 5 раз, то пишем: $AB=5$ см. Численное значение длины AB равно 5.

Если единичный отрезок не имеет названия, а длина отрезка AB равна, например, 12 единицам длины, то пишем: $AB=12$ ед. Численное значение длины AB равно 12. Запись $AB=12$ является сокращением записи $AB=12$ ед.

Если изменить единичный отрезок, то численное значение длины изменится. Рассмотрим пример, уменьшив единичный отрезок. Длину отрезка, равную 7,6 см, выразим в миллиметрах. Поскольку 1 см = 10 мм, то 7,6 см = 7,6·1 см = 7,6·10 мм = 76 мм. В другом примере увеличим единичный отрезок. Длину отрезка, равную 120 м, выразим в километрах. Поскольку 1 м=0,001 км, то 120 м=120·1 м=120·0,001 км=0,12 км.

В общем случае выполняется правило:

при замене единицы длины численное значение длины увеличивается (уменьшается) во столько раз, во сколько новая единица меньше (больше) старой.

4.3 Измерение длины отрезка.

Мы ответим сейчас на два вопроса: 1) Как, имея измерительный инструмент (например, метровую линейку с делениями), найти численное значение длины данного отрезка (к примеру, длину рейки)? 2) Как можно сделать инструмент для измерения длины? Проследите, где мы будем использовать основные свойства длины.

Ответим на первый вопрос. Пусть надо измерить рейку AB метровой линейкой PQ, разбитой на дециметры и сантиметры *(рис. 35, а)*. Приложим к рейке AB линейку PQ, совместив их начала A и P.

Возможны два случая:

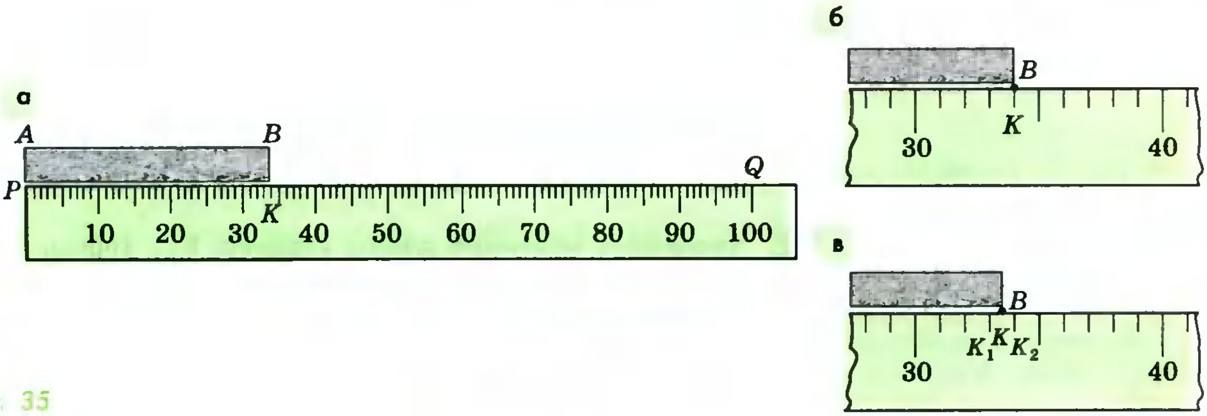


Рис. 35

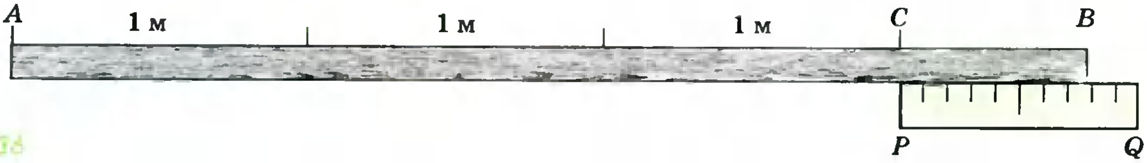


Рис. 36

а) Рейка AB не длиннее линейки PQ. Тогда точка B совместится с одной из точек K линейки PQ. На языке геометрии это значит, что на PQ отложили отрезок $PK = AB$. Так как равные отрезки имеют равные длины, то длина рейки AB равна длине отрезка PK на линейке.

В случае, когда точка K является одним из делений линейки (дециметровым, сантиметровым), длина отрезка PK указана на линейке *(рис. 35, б)*.

Но может быть, что точка K не совпала ни с одним из делений линейки *(рис. 35, в)*. Тогда K лежит между двумя соседними сантиметровыми делениями K_1 и K_2. В этом случае длины отрезков PK_1 и PK_2 дают приближенные значения длины отрезка PK с точностью до сантиметра (с недостатком и с избытком). Если нужна большая точность, то измеряют отрезок K_1K линейкой с более мелкими, миллиметровыми делениями. Длина отрезка PK будет равна сумме длин отрезков PK_1 и K_1K. Теоретически этот процесс может продолжаться неограниченно. Практически же он всегда оканчивается, как только мы достигаем нужной точности.

б) Пусть теперь рейка AB длиннее линейки PQ. Будем тогда последовательно откладывать линейкой на рейке метровые отрезки, пока это возможно *(рис. 36)*. Если линейка уложится вдоль рейки, например, ровно 3 раза, то длина рейки AB равна 3 м. Может случиться, что на AB линейка не укладывается целое число раз. Тогда, отложив ее несколько раз (например, три), получим на рейке остаток CB, меньший метра. Длину его измеряем, как в случае а). Длина отрезка AB равна сумме длин AC и CB.

Мы ответили на первый поставленный вопрос.

Ответим теперь на второй. Как, например, сделать планку пригодной для измерения длин? Сначала отложим на ней последовательно любой отрезок, который приняли за единицу длины. При этом укажем, сколько раз он отложен от начала. Затем единичные отрезки делим на меньшие доли, например пополам, и отмечаем соответствующие им деления. И так далее, пока не получим нужную точность. Так и делают линейки, рулетки и т. п.

3.4 Связь действий с отрезками и действий с их длинами.

Подводя итог сказанному в этом параграфе, мы приходим к важному выводу: между действиями с отрезками и действиями с их длинами имеется соответствие.

1. а) Если отрезки равны, то и длины их равны. б) Обратно: если длины отрезков равны, то и отрезки равны.

2. а) Если первый отрезок больше второго, то и длина его больше. б) Обратно: если длина первого отрезка больше длины второго, то и сам первый отрезок больше.

3. При сложении отрезков их длины складываются, а при вычитании вычитаются.

1. Каковы основные свойства длины отрезка?
2. Что происходит с численным значением длины при изменении единицы длины?
3. Какая связь действий с отрезками и действий с их длинами?

Задачи к § 4

4.1. Чему равен периметр треугольника, у которого: а) длины сторон равны a, b, c; б) длины двух сторон равны a, а длина третьей — b; в) длины всех сторон a?

4.2. Чему равен периметр: а) квадрата со стороной a; б) прямоугольника со сторонами a и b?
(**Периметром треугольника** и вообще **многоугольника** называется сумма длин всех его сторон.)

4.3. Длина отрезка AB равна 46 мм. Точка C лежит внутри AB на расстоянии 22 мм от точки A. На каком расстоянии она находится от точки B?

4.4. Длина отрезка a равна 16 мм, длина отрезка b равна 3,2 см. Чему равны длины отрезков: $3a$, $\frac{1}{2}b$, $2a+\frac{1}{2}b$, $a-\frac{1}{4}b$?

4.5. Внутри отрезка AB отметьте точки C и D, причем $AC<AD$. Выразите расстояние CD через расстояния между другими точками отрезка AB.

4.6. Нарисуйте прямую и отметьте на ней точку A.
а) Постройте на прямой такую точку X, которая удалена от A на 2 см. Сколько вы построили таких точек?
б) Какую фигуру образуют на этой прямой такие точки X, что $AX \leqslant 2$ см; $AX \geqslant 3$ см; 3 см $\leqslant AX \leqslant 4$ см?

4.7. На прямой отложите отрезки $AB=4$ см и $BC=2$ см. а) Вычислите AC. б) Постройте теперь точку D, такую, что $BD=6$ см. Вычислите AD.

4.8. На прямой постройте отрезок AB длиной 6 см.
а) Есть ли на AB такая точка, которая на 2 см ближе к A, чем к B? Если есть, то постройте ее. Найдется ли такая точка на прямой AB вне этого отрезка?
б) Постройте на AB такую точку, которая в 2 раза ближе к A, чем к B. Найдется ли такая точка на прямой AB вне этого отрезка?

4.9. Нарисуйте прямую. Постройте на ней отрезок $AB=4$ см. Какую фигуру образуют на этой прямой такие точки X, что: а) $XA \leqslant 3$ см и $XB \leqslant 3$ см; б) $XA \geqslant 3$ см и $XB \leqslant 3$ см; в) $XA \leqslant 3$ см или $XB \geqslant 3$ см; г) $XA \geqslant 3$ см или $XB \geqslant 3$ см?

4.10. Вычислите периметр треугольника, у которого: а) стороны равны 2,6 дм, 32 см, 165 мм; б) две стороны по 15,6 дм, а третья — 2,3 м; в) все стороны равны по 1,21 км.

4.11. Вычислите периметр: а) квадрата со стороной 1 дм; б) прямоугольника со сторонами 26 мм и 4,2 см.

4.12. Запишите формулу для вычисления периметра P цветных частей прямоугольника, которые изображены на *рисунке 37*. Вычислите его.

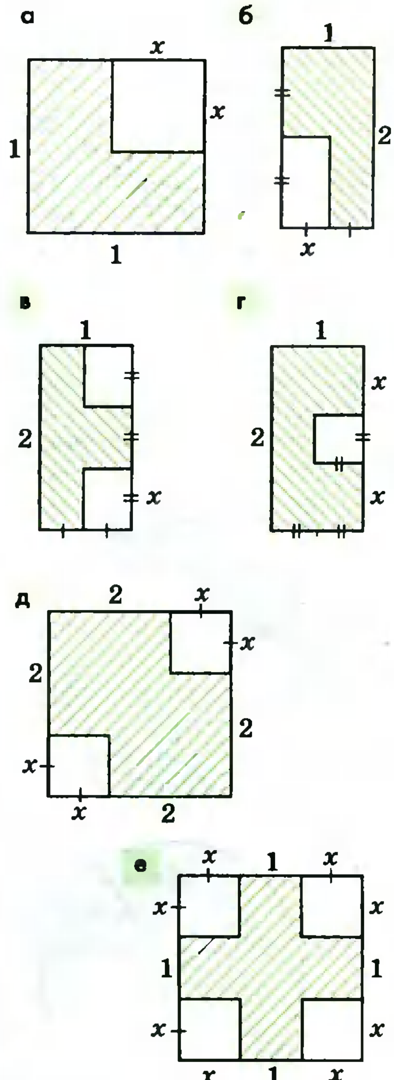


Рис 37

4.13. Вычислите: а) сторону равностороннего треугольника, если его периметр 6 см; б) сторону квадрата, если его периметр 5 см; в) сторону квадрата, если его периметр 51 мм.

4.14. а) На прямом участке ограды длиной 20 м через каждый метр врыт столб. Сколько врыто столбов? Какое расстояние между первым столбом от начала и пятым от конца? десятым от начала и десятым от конца?
б) Нужно огородить прямоугольный участок земли размером 100×50 м. Сколько понадобится столбов для изгороди, если врывать их на расстоянии 1 м друг от друга?

4.15. Измерьте длину своего шага, своей ступни, расстояние между кончиками пальцев вытянутых рук, вытянутыми пальцами одной руки, длину большого пальца от нижнего сустава до конца, длину ногтя на мизинце. Поупражняйтесь в вычислении длин, используя эти сведения.

4.16. Знаете ли вы, чему примерно равны в метрической системе: а) сажень и косая сажень; б) верста; в) два вершка; г) семь футов (под килем); д) пядь (земли)?

4.17. Из одного куска проволоки, не разрезая его, надо сделать каркас: а) треугольной пирамиды; б) четырехугольной пирамиды; в) куба. Каждое ребро этих многогранников равно 10 см. Какова длина такой проволоки?

4.18. а) Сумма двух любых сторон треугольника равна 10 см. Вычислите периметр треугольника.
б) Периметр каждой грани тетраэдра равен 10 см. Найдите сумму длин ребер тетраэдра.

§ 5 Окружность и круг

5.1 Определение окружности и круга. Вы постоянно встречаетесь с предметами, имеющими форму круга: тарелки, пуговицы и т. д. Границы этих предметов являются окружностями.

Когда вы строите окружность циркулем, то ножка циркуля делает полный оборот вокруг отмеченной точки — центра. На этом построении и основано определение окружности.

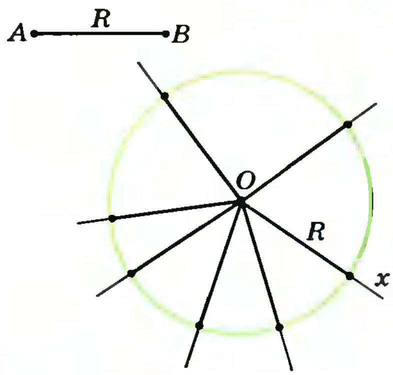


Рис. 38

Определение. **Окружностью** называется фигура, которая состоит из всех точек плоскости, удаленных от заданной точки на заданное расстояние (*рис. 38, а*).

Заданная точка называется **центром** окружности, а заданное расстояние — ее **радиусом**. Радиусом окружности называют не только расстояние, но и любой отрезок, соединяющий центр окружности с точкой на окружности. Все эти отрезки — **радиусы — равны между собой**. Радиус можно задать как числом, так и отрезком.

Итак, точки окружности с центром O и радиусом R — это концы отрезков длиной R, проведенных из точки O.

Фигуру, ограниченную окружностью, называют кругом (*рис. 39, а*). Кругу можно дать другое определение. Оно основано на том, что все точки внутри круга удалены от центра окружности меньше чем на радиус. Поэтому **кругом** можно назвать фигуру, которая состоит из всех точек, удаленных от заданной точки не больше чем на заданное расстояние (*рис. 39, б*).

Сама окружность является границей круга и принадлежит ему.

Центр и радиус круга — это центр и радиус окружности, которая его ограничивает.

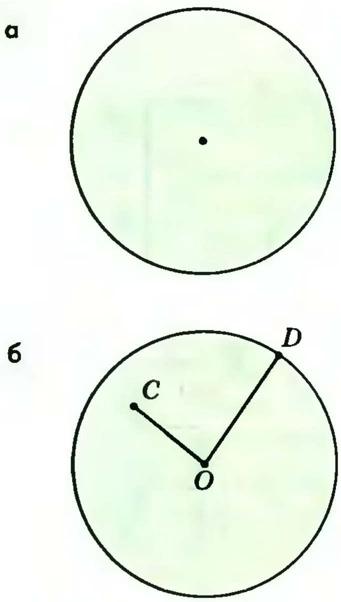


Рис. 39

5.2 Части круга.

Если на окружности взять две точки, то они разобьют окружность на две части (*рис. 40, а*). Каждая из них называется **дугой** окружности, а данные точки — концами этих дуг.

Отрезок, соединяющий две точки окружности, называется **хордой** окружности, а также **хордой** ограниченного ею круга (*рис. 40, б*). Вообще **хордой** любой **фигуры** мы называем отрезок, соединяющий две точки ее границы.

Хорда, проходящая через центр окружности (круга), называется **диаметром** окружности (круга, *рис. 40, в*). Концы диаметра называются **диаметрально противоположными** точками окружности. Они разбивают окружность на две **полуокружности**.

Центр окружности разбивает диаметр на два радиуса. Поэтому

диаметр равен двум радиусам, а радиус равен половине диаметра.

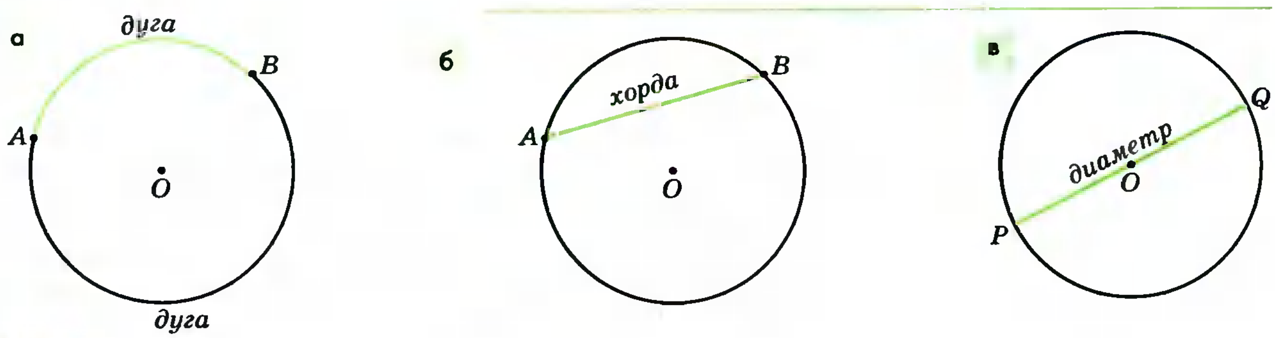


Рис. 40

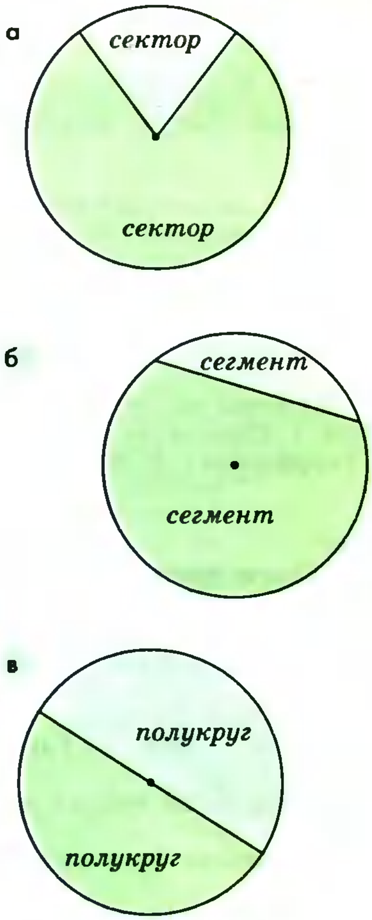


Рис. 41

Диаметр (как и радиус) — это не только отрезок, но и его длина.

Два радиуса разбивают круг на две части, каждая из которых называется **сектором** круга *(рис. 41, а)*.

Хорда разбивает круг на две части, каждая из которых называется **сегментом** круга *(рис. 41, б)*.

Диаметр разбивает круг на два **полукруга** *(рис. 41, в)*. Полукруг ограничен диаметром и полуокружностью. Полукруг является одновременно и сегментом и сектором круга.

5.3 ◆ **Построения циркулем и линейкой.** Для построения небольших геометрических фигур используют различные инструменты: циркуль, линейку, угольник, транспортир и т. д. Большие же геометрические фигуры этими инструментами не начертишь. Например, нет такого циркуля, которым можно было бы начертить центральный круг на футбольном поле или арену цирка. Здесь можно применить и применяют с древнейших времен веревки и т. п. *(рис. 42)*.

Конечно, в современном производстве применяются более сложные специальные инструменты для построений. Проведение отрезков и окружностей на земле — задача не геометрии, а других наук.

Первые два постулата Евклида говорят о построении прямоугольных отрезков с помощью линейки. А третий постулат Евклида говорит о построении окружности с помощью циркуля.

В геометрии для построения фигур, образованных отрезками, окружностями и их дугами, достаточно двух инструментов — линейки (даже без делений) и циркуля. При этом считается, что:

1) можно провести отрезок любой длины и

2) можно построить циркулем окружность любого радиуса с центром в любой точке.

Такая традиция сложилась в геометрии еще в Древней Греции.

Конечно, выполняя построения практически, вы будете использовать, кроме циркуля и линейки, и другие инструменты, например угольник для проведения перпендикуляров. Но все эти построения могут быть сведены к построениям только циркулем и линейкой. Тем самым другие инструменты применяются лишь для удобства. ◆

Рис. 42

1. Что называется окружностью? Как строят окружность?
2. Что такое круг?
3. Какие части круга вы знаете?
4. Как связаны диаметр и радиус?
5. Почему в геометрической теории для построений используют только циркуль и линейку?

Задачи к § 5

5.1. Дан треугольник. Постройте треугольник, стороны которого равны сторонам данного треугольника.

5.2. Нарисуйте окружность.
а) Отметьте на ней точку. Сколько можно провести через нее диаметров? а хорд? Какая из этих хорд будет, по-вашему, наибольшей? а наименьшей?
б) Теперь отметьте точку внутри нарисованного круга. Сколько можно провести через нее диаметров? а хорд?

5.3. На сколько частей могут разбить круг: а) две хорды; б) три хорды? Каково наименьшее и наибольшее число частей, на которые можно разбить круг четырьмя хордами?

5.4. Нарисуйте окружность с центром O. Пусть точка X движется по этой окружности. Какую фигуру «заметет» радиус OX, если точка X прошла по окружности: а) некоторую дугу; б) полуокружность; в) всю окружность? А что «заметет» луч OX?

5.5. Нарисуйте окружность.
а) Какую фигуру образуют середины всех ее радиусов?
б) Пусть A — ее центр, а B — точка на окружности. Какую фигуру образуют все точки X, такие, что $AX=2\cdot AB$?

5.6. Отметьте некоторую точку. Нарисуйте фигуру, все точки которой удалены от этой точки на расстояние d, удовлетворяющее условию 2 см$\leqslant d\leqslant$3 см. Как бы вы ее назвали?

5.7. Постройте две точки A и B так, что $AB=5$ см. Постройте точку X, такую, что: а) $XA=3$ см, $XB=4$ см; б) $XA=3$ см; $XB=2$ см; в) $XA=3$ см, $XB=8$ см. Удастся ли вам построить точку X, такую, что $XA=3$ см, $XB=1$ см?

5.8. Постройте треугольник со сторонами: а) 3 см, 4 см, 5 см; б) 25 мм, 45 мм, 60 мм; в) 5 см и 10 см.

5.9. а) К колу, вбитому в землю, на веревке привязана коза. Какова форма участка, с которого коза может есть траву?
б) Вбито два кола, между ними натянута проволока, вдоль которой может скользить веревка. К веревке привязана коза. Ответьте на вопрос задачи а).
в) Вернемся к задаче а). Пусть длина веревки 10 м. Другая коза привязана к веревке длиной 15 м. На каком расстоянии от первого кола надо забить кол для второй козы, чтобы она, привязанная к нему, не мешала есть траву первой козе?

§ 6 Углы

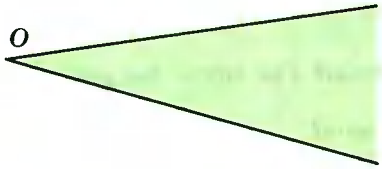


Рис. 43

6.1 Определение угла. Обозначение углов. **Углом** называется часть плоскости, ограниченная двумя лучами с общим началом *(рис. 43)*. Эти лучи называются **сторонами угла**, а их начало — **вершиной угла**. Стороны угла принадлежат углу.

Если стороны угла образуют прямую, то угол называется **развернутым** *(рис. 44, а)*. Часть плоскости, ограниченная прямой, является полуплоскостью *(рис. 44, б)*. Поэтому развернутый угол — это полуплоскость, на границе которой отмечена точка — его вершина.

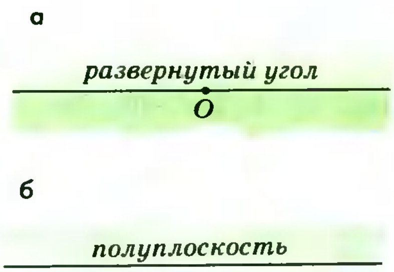


Рис. 44

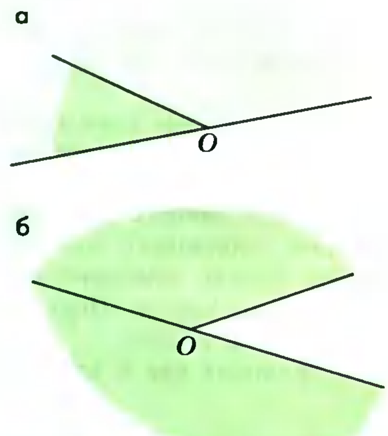


Рис. 45

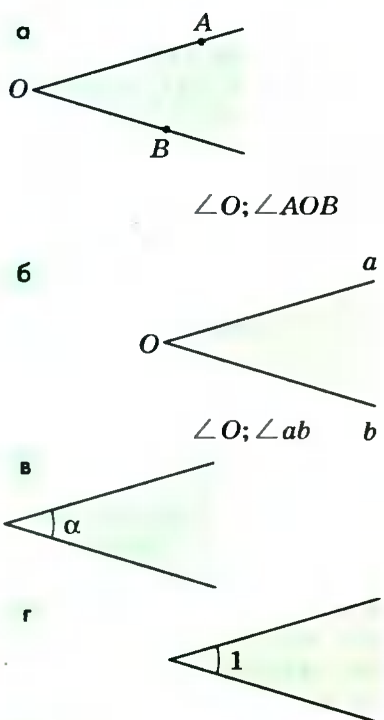


Рис. 46 ∠1

Если угол не развернутый, то он может быть меньше или больше развернутого угла. Угол, который является частью развернутого угла, меньше его (рис. 45, а). А если угол содержит развернутый угол, то он больше развернутого угла (рис. 45, б).

Два луча с общим началом делят плоскость на два угла. Если лучи не лежат на одной прямой, то один из этих углов больше развернутого, а другой — меньше. Мы пока не будем рассматривать углы, которые больше развернутого. Поэтому, говоря «угол», мы подразумеваем, что этот угол меньше развернутого.

О точках угла, не лежащих на его сторонах, говорят, что они лежат **внутри угла**.

Углы обозначают по-разному (рис. 46): $\angle ab$, $\angle O$, $\angle AOB$, $\angle 1$ и т. п. При этом знак $\angle$ заменяет слово «угол». Когда углы обозначают греческими буквами α (альфа), β (бэта), γ (гамма) и т. д., знак $\angle$ не пишут.

В дальнейшем нам придется говорить об углах между отрезками с общим концом (например, об углах между радиусами окружности). **Углом между отрезками OA и OB называется угол между лучами OA и OB, если эти лучи различны.**

6.2 Равенство углов. Мы уже говорили, что равенство фигур можно установить наложением. Но угол — бесконечная часть плоскости. Поэтому представить себе наложение одного угла на другой трудно. Осуществить же это наложение на практике уж никак невозможно. Поэтому мы сведем задачу сравнения углов к сравнению фигур ограниченных размеров. Для этого сначала решим практическую задачу.

Задача. Дан угол, надо построить такой же угол в другом месте.

Как это сделать с помощью транспортира, вы знаете. А если транспортира нет? Мы поступим так.

Пусть дан угол O между отрезками OP и OQ (рис. 47, а). Возьмем две рейки, скрепим их одним концом и положим на отрезки OP и OQ. Затем скрепим любые две точки A и B этих реек поперечной рейкой. Из этих трех реек получится жесткая фигура, не изменяющаяся при переносе в другое место. Ее можно перенести в нужное место и очертить там по рейкам угол (рис. 47, б). Он и будет такой же, как данный.

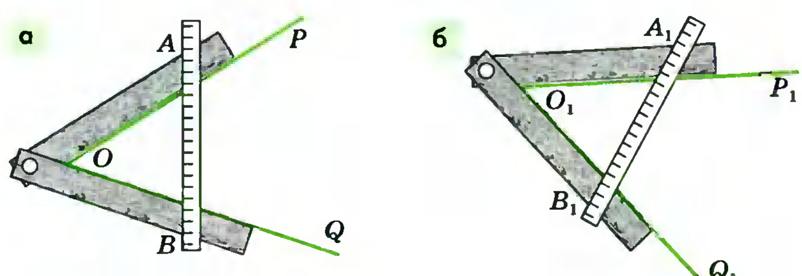


Рис. 47

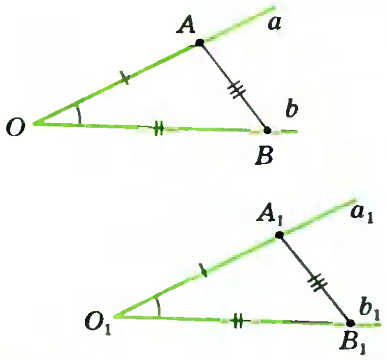


Рис. 48

На основе этого практического построения, переведя его на язык геометрии, определим **равенство углов.**

Пусть даны угол с вершиной O и сторонами a, b и угол с вершиной O_1 и сторонами a_1, b_1 *(рис. 48)*. Допустим, что на их сторонах найдутся такие точки A, B и A_1, B_1, что $O_1A_1=OA$, $O_1B_1=OB$, $A_1B_1=AB$. Тогда эти углы называются **равными.**

Равенство углов записывают так: $\angle O_1=\angle O$, или $\angle a_1b_1=\angle ab$, или $\angle A_1O_1B_1=\angle AOB$.

Равные углы отмечают одинаковым числом дуг, как на *рисунке 48*.

Отрезок, соединяющий точки на разных сторонах угла, назовем **хордой** угла. Хорды AB и A_1B_1 двух углов O и O_1 назовем **соответственными,** если $AO=A_1O_1$ и $OB=$ $=O_1B_1$ *(рис. 49)*.

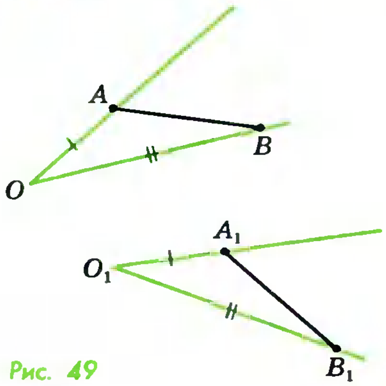


Рис. 49

Теперь определение равенства углов можно сформулировать совсем кратко: **два угла** называются **равными,** если у этих углов найдутся равные соответственные хорды.

Совмещая наложением два реальных равных угла (например, два одинаковых чертежных угольника), мы совмещаем их вершины и их стороны. Можно заметить, что при этом совмещаются соответственные хорды. Поэтому *у равных углов соответственные хорды равны.*

Это практическое наблюдение приводит нас к следующей аксиоме.

Аксиома *(о свойстве равных углов)* **Соответственные хорды равных углов равны.**

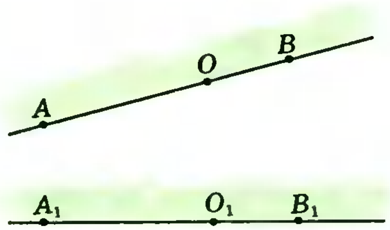


Рис. 50

Подробнее это означает следующее. Если $\angle O=\angle O_1$, а AB и A_1B_1 — соответственные хорды углов O и O_1, т. е. $OA=$ $=O_1A_1$ и $OB=O_1B_1$, то $AB=A_1B_1$ *(см. рис. 48)*.

Особый случай представляет развернутый угол. Все развернутые углы равны.

- Действительно, для развернутых углов *(рис. 50)*

$$AB=AO+OB \text{ и } A_1B_1=A_1O_1+O_1B_1.$$

Если $A_1O_1=AO$ и $O_1B_1=OB$, то $A_1B_1=AB$ по аксиоме сложения отрезков.

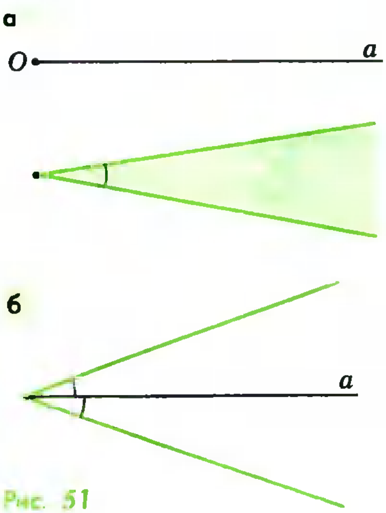


Рис. 51

6.3 Откладывание угла. Часто требуется построить угол, равный данному, так, чтобы одна его сторона совпала с уже заданным лучом. Решим эту задачу.

Пусть заданы луч a и некоторый угол *(рис. 51, а)*. В предыдущем пункте описано, как можно с помощью реек построить угол, равный данному. Если вспомнить это построение, то станет ясно, что можно **отложить** (т. е. построить) ровно два угла, равных данному, — по одному с каждой стороны от луча a *(рис. 51, б)*.

Эти наглядно ясные свойства угла мы формулируем в виде следующей аксиомы:

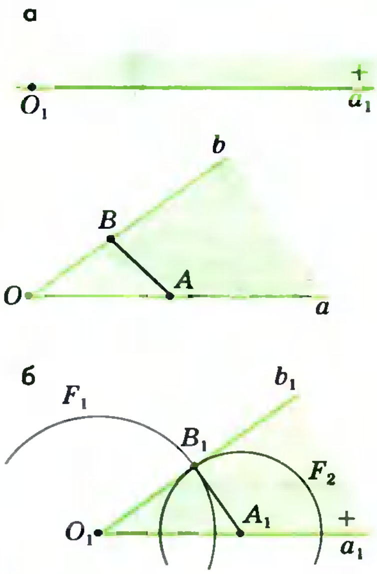


Рис. 52

Аксиома (*откладывания угла*) **От каждого данного луча по любую сторону от него можно отложить угол, равный данному, и притом только один.**

Разберем подробнее, что это значит, вспомнив, какие углы считаются равными.

Пусть даны угол ab с вершиной O и луч a_1 с началом O_1 (*рис. 52, а*). Прямая, содержащая луч a_1, разбивает плоскость на две полуплоскости. Одну из них отметим значком +. Возьмем на лучах a и b какие-нибудь точки A и B. Соединим их отрезком AB. На луче a_1 отложим отрезок O_1A_1, равный OA (*рис. 52, б*). Проведем окружность F_1 с центром O_1 радиусом OB и окружность F_2 с центром A_1 радиусом AB.

Аксиома, во-первых, утверждает, что одна из точек пересечения этих окружностей лежит в отмеченной полуплоскости. Обозначим эту точку B_1. Теперь если из точки O_1 через точку B_1 провести луч b_1, то получим угол a_1b_1, равный углу ab. Он будет равен углу ab по определению равенства углов, так как $O_1A_1=OA$, $O_1B_1=OB$, $A_1B_1=AB$.

Именно об этом и говорится в первой части аксиомы: от данного луча по любую сторону можно отложить угол, равный данному.

Во-вторых, аксиома утверждает, что такой угол можно отложить только один. Если взять на сторонах угла ab вместо точек A и B любые другие и сделать такое же построение, то получится тот же угол a_1b_1.

6.4 **Построение углов на практике.** При формулировке аксиомы откладывания угла говорится о таком построении. Два стержня накладываются на стороны данного угла так, чтобы их концы попали в вершину, и эти концы скрепляются. Затем стержни скрепляются поперечным стержнем, вся конструкция переносится, куда нужно, и по ней строится угол. Соответствующая конструкция изображена на *рисунке 53, а*.

В инструментах, служащих для засекания, фиксирования и измерения углов, поперечный стержень изгибается по дуге окружности (*рис. 53, б*). Так же, по сути, фиксируют угол посредством транспортира — по дуге окружности (*рис. 54*).

Сходный принцип применяется в инструментах, служащих для измерения углов на местности (на *рисунке 55* изображена астролябия) или при различных астрономических наблюдениях. На *рисунке 56* изображен квадрант — прибор, служащий для определения высот небесных светил.

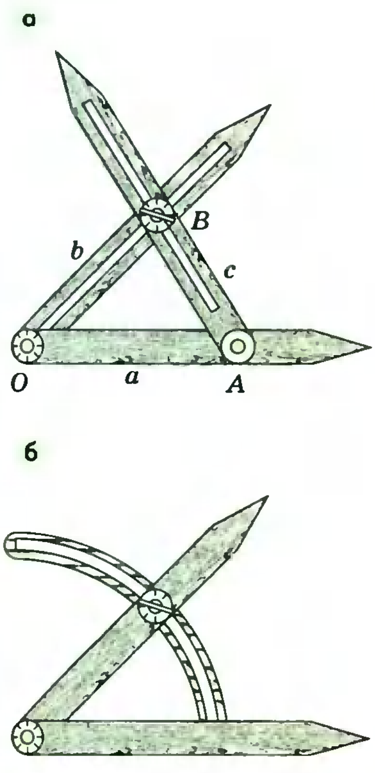


Рис. 53

6.5 **Построение угла, равного данному, циркулем и линейкой.** В п. 6.2 построение угла, равного данному, мы проводили с помощью реек. Выполним такое построение с помощью циркуля и линейки.

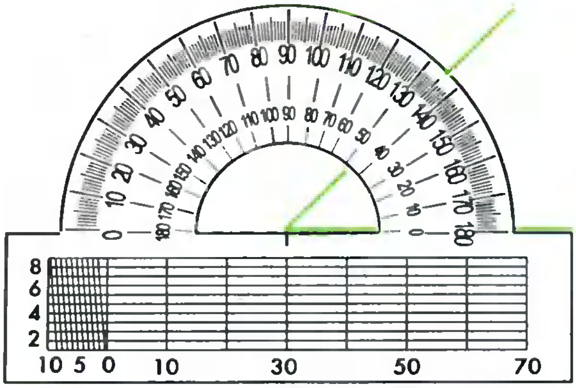


Рис. 54

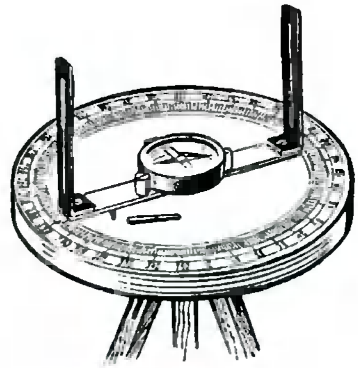


Рис. 55

Задача. От данного луча по данную от него сторону отложить угол, равный данному углу.

Запишем кратко условие задачи.

Дано: 1) $\angle ab$ с вершиной O; 2) луч a_1 с началом O_1; 3) полуплоскость, на границе которой лежит луч a_1 (рис. 57, а).

Построение. Опишем вокруг точки O какую-нибудь окружность F. Она пересечет лучи a и b соответственно в точках A и B (рис. 57, б). Построим окружность F_1 с центром O_1 радиусом, равным OA. Отметим точку A_1, где окружность F_1 пересечет луч a_1. Получим отрезок $O_1A_1=OA$. Построим окружность F_2 с центром A_1 и радиусом, равным AB. С нужной стороны от луча a_1 отметим точку B_1, где пересекаются F_1 и F_2.

Из точки O_1 через точку B_1 проведем луч. Обозначим его b_1. Получим угол a_1b_1, который надо построить. Докажем, что $\angle a_1b_1=\angle ab$.

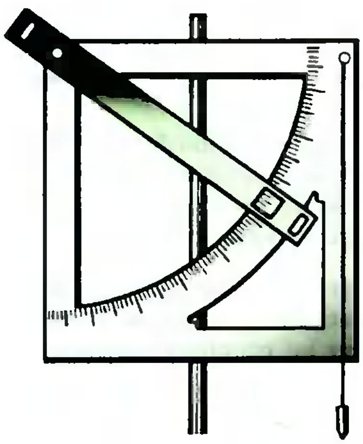
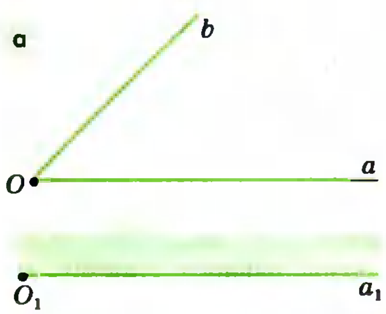


Рис. 56

• **Доказательство.** Радиусы O_1A_1 и O_1B_1 окружности F_1 равны OA (по построению), т. е. $O_1A_1=O_1B_1=OA$. А так как $OA=OB$, то $O_1B_1=OB$. Радиус A_1B_1 окружности F_2 равен AB, т. е. $A_1B_1=AB$. Итак, имеем равенства отрезков: $O_1A_1=OA$, $O_1B_1=OB$, $A_1B_1=AB$. По определению равенства углов $\angle a_1b_1=\angle ab$. Задача решена.

Выясним, сколько решений имеет задача, т. е. сколько имеется углов, удовлетворяющих условию задачи. Согласно аксиоме откладывания угла эта задача имеет единственное решение.

а



б

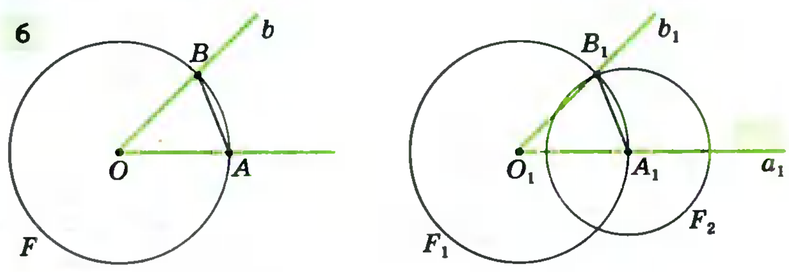


Рис. 57

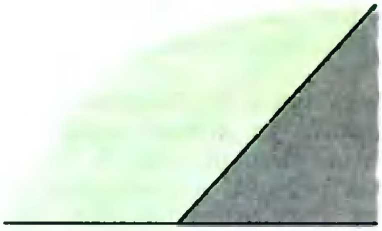


Рис. 58

6.6 **Смежные углы. Прямой угол. Перпендикуляр.** Используя равенство углов, определим прямой угол — важнейшее понятие геометрии. Но сначала определим смежные углы.

Определение. Два угла называются **смежными,** если одна сторона у них общая, а две другие стороны составляют прямую (*рис. 58*).

В объединении смежные углы дают развернутый угол.

Определение. **Прямым углом** называется угол, равный своему смежному (*рис. 59*).

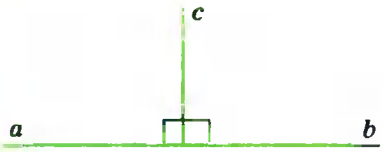


Рис. 59

Другими словами, прямой угол — это половина развернутого угла.

Все прямые углы равны друг другу. Это следует из того, что все развернутые углы равны друг другу. А половины равных углов равны между собой.

На рисунках прямые углы отмечают не дугами, а уголками.

Отрезок, проведенный из точки на прямой и образующий с нею прямые углы, называется **перпендикуляром** к этой прямой (*рис. 60*).

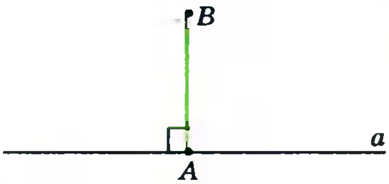


Рис. 60

1. Что такое угол?
2. Какие элементы угла вы знаете?
3. Какой угол называется развернутым?
4. Как построить угол, равный данному: а) с помощью реек; б) циркулем и линейкой?
5. Какие углы называются смежными?
6. Какой угол называется прямым?
7. Что такое перпендикуляр к прямой?

Задачи к §

6.1 **6.1.** Назовите все углы, которые изображены на каждом из *рисунков 61*.

6.2. Нарисуйте угол. Из его вершины проведите луч внутри угла. Сколько углов на этом рисунке?

Ответьте на тот же вопрос, если провести два таких же луча.

6.3. Нарисуйте угол. Нарисуйте: а) какую-либо его хорду; б) две его хорды с общим концом; в) две пересекающиеся хорды.

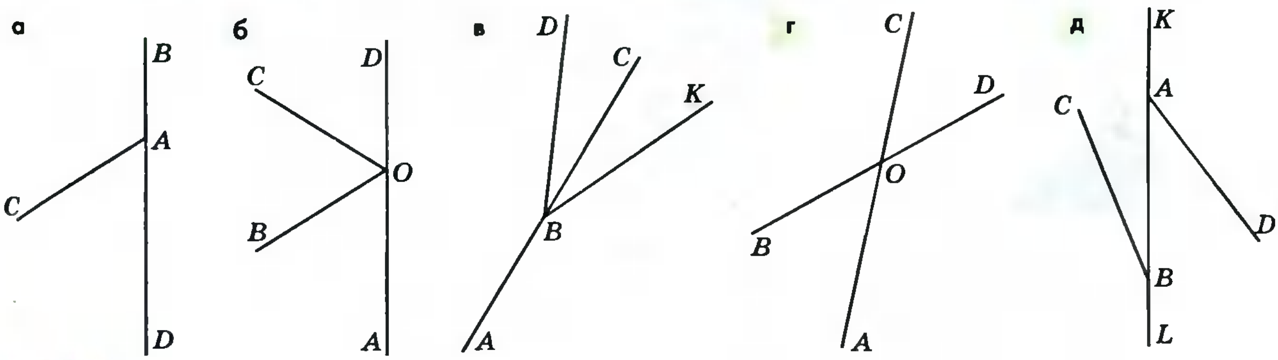


Рис. 61

6.4. Нарисуйте отрезок. Нарисуйте какой-нибудь угол, для которого этот отрезок является хордой. Нарисуйте еще один такой же угол. Сколько таких углов можно нарисовать?

6.3 **6.5.** Нарисуйте угол с вершиной O. Нарисуйте какой-нибудь луч a. На сторонах данного угла отложите от O два любых отрезка. Соедините их концы хордой. С помощью этих трех отрезков отложите от луча a угол, равный углу O. Затем на сторонах данного угла отложите от O два других отрезка и соедините их концы хордой. Снова отложите от a с помощью этих трех отрезков угол, равный углу O, причем с той же стороны, что и раньше. Что вы увидели? Как вы это объясните?

6.6 **6.6.** Посмотрите на *рисунок 61*. Найдите пары смежных углов на этом рисунке.

6.7. Нарисуйте угол. Постройте угол, смежный ему. Сколько таких углов можно построить? Сравните построенные углы с помощью циркуля и линейки.

6.8. Нарисуйте треугольник. Нарисуйте все углы, смежные углам треугольника. (Такие углы называются внешними углами треугольника.)

6.9. Нарисуйте два смежных угла. Какая фигура является их пересечением? их объединением?

6.10. Являются ли два угла смежными, если: а) их объединением является полуплоскость; б) их пересечением является луч; в) выполнены условия задач а) и б)?

6.11. Нарисуйте разные фигуры, которые могут получиться при пересечении двух прямых углов. В частности, может ли получиться прямой угол?

6.12. Нарисуйте разные фигуры, которые могут получиться при объединении прямых углов. В частности, может ли получиться прямой угол?

6.13. Возьмите тетрадный лист бумаги и оборвите его так, чтобы по краям не осталось никаких отрезков. На оставшейся части одними только сгибаниями получите: а) смежные углы; б) прямой угол.

6.14. Как с помощью веревки и колышков провести на земле прямой угол?

6.15. Сколько углов между ребрами тетраэдра?

6.16. Сколько прямых углов у граней куба?

§ 7 Действия над углами

Над углами можно выполнять те же действия, что и над отрезками.

7.1 **Сравнение углов.** Как с помощью аксиомы откладывания отрезка мы сравниваем отрезки, так с помощью аксиомы откладывания угла мы можем сравнивать углы.

Пусть нам даны два угла: угол ab и угол pq (*рис. 62*). Отложим от луча a угол ac, равный углу pq, в ту сторону, где лежит угол ab. Возможны три случая:

1) Луч c совпадает с лучом b. Тогда угол pq **равен** углу ab и пишут: $\angle pq = \angle ab$ (*рис. 63, а*).

2) Луч c идет внутри угла ab, т. е. угол ac является частью угла ab (*рис. 63, б*). В этом случае говорят, что **угол** pq **меньше угла** ab, и пишут: $\angle pq < \angle ab$.

3) Луч c идет вне угла ab, т. е. угол ab является частью угла ac (*рис. 63, в*). В этом случае говорят, что **угол** pq **больше угла** ab, и пишут: $\angle pq > \angle ab$.

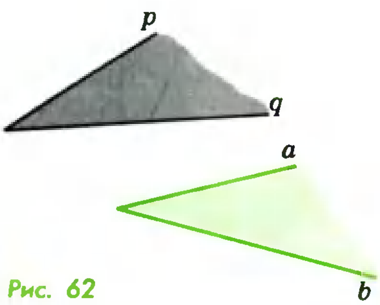


Рис. 62

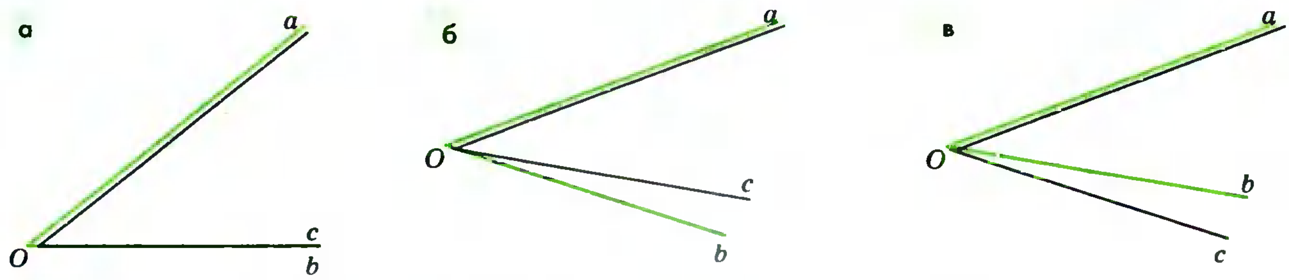


Рис. 63

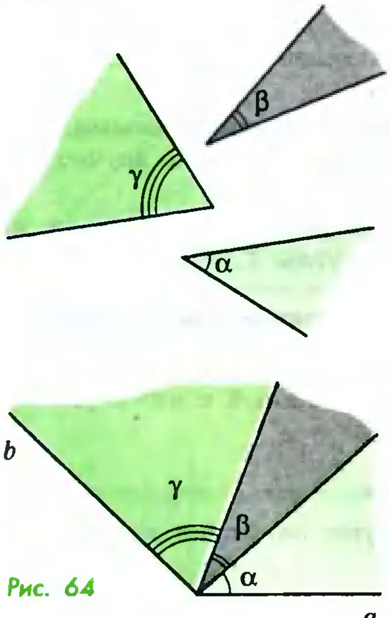


Рис. 64

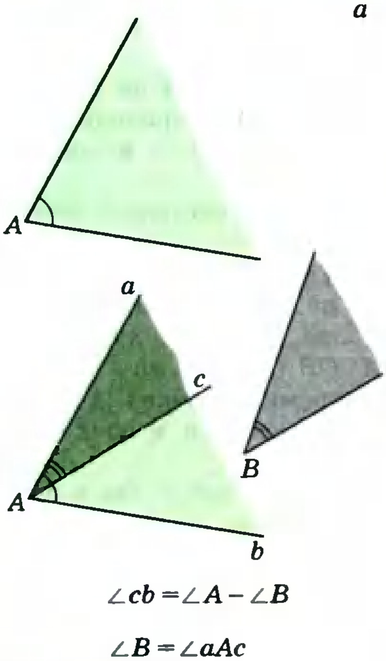


Рис. 65

Теперь можно дать определения.

Угол, меньший прямого угла, называется **острым**. Угол, больший прямого угла, но меньший развернутого, называется **тупым**.

7.2 Сложение и вычитание углов. Углы можно складывать подобно отрезкам, только отрезки прикладывают друг к другу концами, а углы — сторонами. Так, если луч c идет внутри угла ab из его вершины, то угол ab будет **суммой углов** ac и cb (см. рис. 63, б).

Сложение углов состоит в том, что из равных им углов составляется один угол — их сумма. Например, на рисунке 64 угол ab составляется из углов, равных углам α, β, γ. Это можно сделать так. Где-то строится угол, равный углу α. Затем от одной из его сторон откладывается угол, равный β, так, чтобы он не налегал на угол, равный α. Далее к полученному углу точно так же пристраивается угол, равный углу γ. Полученный угол и называется суммой данных углов.

Как и при сложении равных отрезков, если угол α слагается из n углов, равных углу β, пишем:

$$\alpha = \underbrace{\beta + \beta + \ldots + \beta}_{n \text{ раз}} = n\beta.$$

Замечание. Пристраивая углы друг к другу, можно получить угол, больший развернутого и даже больший двух развернутых (например, при сложении пяти прямых углов). Такие суммы мы сейчас рассматривать не будем.

Вычитание одного угла из другого — действие, обратное сложению углов. Поэтому **разность углов** A и B — это такой угол C, что сумма углов C и B равна углу A.

Разность двух углов можно построить так. Пусть угол A имеет стороны a и b. От стороны a на угол A накладывается угол ac, равный углу B (рис. 65). Тогда угол cb и есть разность углов A и B.

Ясно, что угол B можно вычесть из угла A лишь тогда, когда угол A больше угла B.

Вычитание углов имеет такое свойство (как и у чисел): если от равных углов отнять равные, то получатся равные углы. Поскольку все развернутые углы равны, то из этого свойства разности углов вытекает такое утверждение:

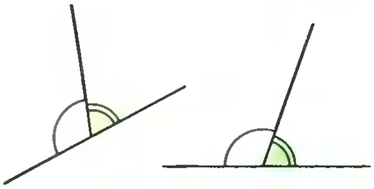


Рис. 66

Если углы равны, то смежные с ними углы тоже равны (рис. 66). В частности, два угла, смежные данному углу, равны.

Поэтому если оказалось, что при пересечении двух прямых один из углов прямой, то и остальные три угла прямые (рис. 67).

• Действительно, пусть при пересечении прямых *a* и *b* угол *1* прямой. Тогда смежные ему углы *2* и *4* тоже прямые. И угол *3*, как смежный углу *2*, тоже прямой.

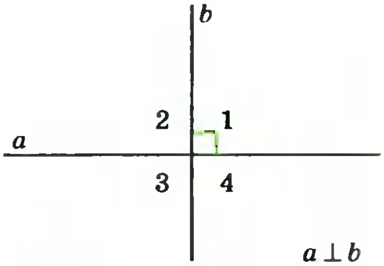


Рис. 67

Определение. Прямые называются **взаимно перпендикулярными**, если при пересечении они образуют прямые углы.

7.3 **Вертикальные углы.** Представление о вертикальных углах дают раскрытые ножницы.

Определение. Два угла называются **вертикальными**, если стороны одного угла дополняют до прямых стороны другого угла (рис. 68).

Две пересекающиеся прямые разбивают плоскость на две пары вертикальных углов: углы *1*, *3* и углы *2*, *4*.

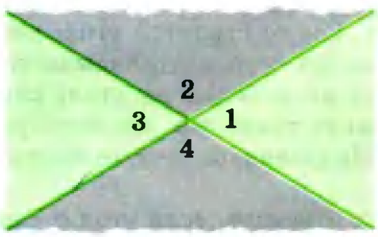


Рис. 68

Свойство вертикальных углов. **Вертикальные углы равны.**

• Действительно, вертикальные углы α и β равны, так как они имеют один и тот же смежный с ними угол — угол γ (рис. 69).

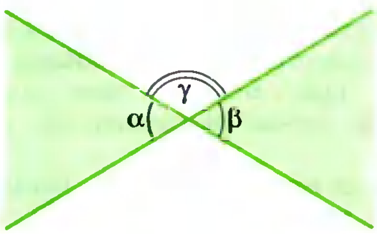


Рис. 69

7.4 **Деление угла пополам. Построение перпендикуляра.**

Определение. Биссектрисой угла называется луч, делящий угол пополам.

Биссектриса угла *ab* — это такой луч *c*, который выходит из вершины *O* угла, идет внутри его, и при этом углы *ac* и *cb* равны (рис. 70).

Биссектриса развернутого угла делит его на два равных, а значит, на два прямых угла. Она перпендикулярна сторонам развернутого угла (см. рис. 59), т. е. образует с ними прямые углы.

Покажем, как циркулем и линейкой построить биссектрису данного угла.

Задача. Построить биссектрису угла.

Построение. Пусть дан угол *ab* с вершиной *O*. Проведем окружность с центром *O*. Она пересечет лучи *a* и *b* в точках *A* и *B*. При этом $OA=OB$ (рис. 71, а).

Построим окружности с центрами в точках *A* и *B* и радиусами, равными *OA*. Они пересекутся в точке *O* и еще в какой-то точке *C* внутри угла.

Проведем из точки *O* через точку *C* луч *c*. Он и будет биссектрисой угла *ab*. Докажем это.

• **Доказательство.** Нам надо доказать, что $\angle ac=\angle bc$. На сторонах углов *ac* и *bc* отложены от их вершин равные отрезки *OA* и *OB*, а отрезок *OC* у них общий. Проведем отрезки *AC* и *BC* (рис. 71, б). Они равны отрезку *OA* (по построению, как радиусы проведенных окружностей).

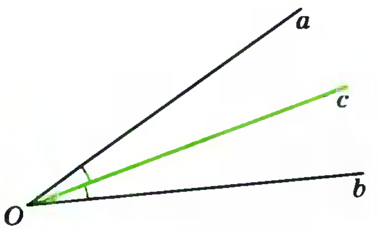


Рис. 70

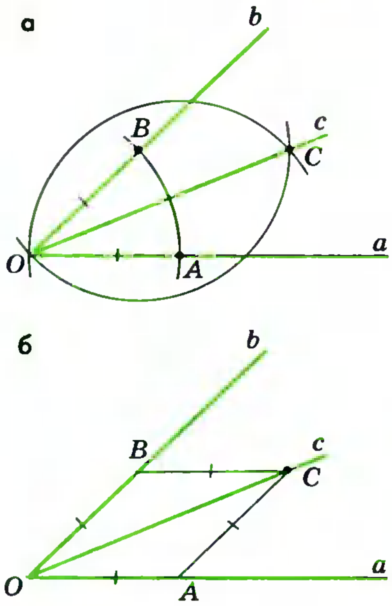


Рис. 71

Следовательно, $AC=BC$.

Поскольку углы ac и bc имеют равные соответственные хорды AC и BC, то углы равны по определению. Следовательно, луч c — биссектриса угла ab.

На *рисунке 72* изображено построение для развернутого угла. (Только при построении точки C проводите окружности одним радиусом, большим OA.) Повторите еще раз для этого случая проведенное доказательство.

Таким образом, построение, изложенное выше, решает еще две задачи:

1) в данной точке прямой провести перпендикуляр к ней;

2) построить прямой угол.

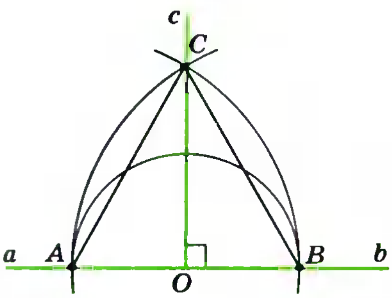


Рис. 72

7.5 ◆ **Задача о делении угла на равные части циркулем и линейкой.** Так же как и деление отрезков, определяется деление углов на натуральные числа. А именно если, например, угол α равен 4β, т. е. $\alpha=4\beta$, то угол $\beta=\frac{1}{4}\alpha$ *(рис. 73)*.

Мы научились циркулем и линейкой делить пополам любой угол, а значит, мы можем разделить его циркулем и линейкой на 4, на 8, на 16 и т. д. равных частей. А можно ли циркулем и линейкой разделить любой угол, например, на три равные части? Эту задачу пытались решить еще древнегреческие геометры. Она получила название *задачи о трисекции угла*. Некоторые углы, например прямой или развернутый угол, можно разделить на три равные части этими инструментами. Как это сделать, вы скоро узнаете. Но решение задачи о трисекции угла, пригодное для любого угла, ни в Древней Греции, ни позднее найти не удавалось. И лишь в XIX в. доказали, что для любых углов такого решения не существует. Например, нельзя разделить циркулем и линейкой на три равные части угол в $60°$.

Оказалось, что вопрос о разрешимости задачи на построение сводится к вопросу о разрешимости некоторых алгебраических задач. Неразрешимость задачи о трисекции угла циркулем и линейкой доказана в алгебре. (Используя другие инструменты, эту задачу решить можно, а приближенно можно решить и этими инструментами.) ◆

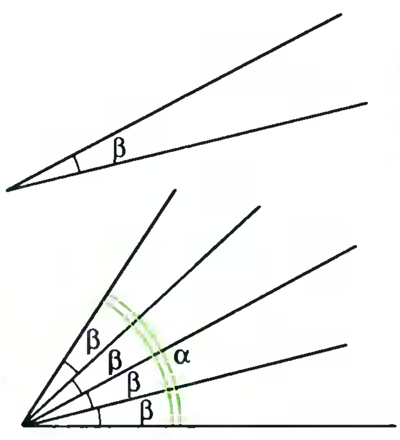


Рис. 73

?

1. Как сравнить два угла?
2. Что такое: а) тупой угол; б) острый угол?
3. Как построить: а) сумму двух углов; б) разность двух углов?
4. Два неразвернутых угла равны. Докажите, что смежные к ним углы тоже равны.
5. Какие углы называются вертикальными?
6. Докажите, что вертикальные углы равны.
7. Как разделить циркулем и линейкой угол пополам?
8. Как построить перпендикуляр к данной прямой?
9. Что такое трисекция угла?

Задачи к § 7

7.1. а) Докажите, что биссектрисы смежных углов образуют прямой угол.
б) Докажите, что биссектрисы двух вертикальных углов образуют развернутый угол.

7.1 **7.2.** Нарисуйте угол. Нарисуйте угол, больший данного, и угол, меньший данного.

7.3. Нарисуйте два угла. Сравните их.

7.4. Верны ли такие утверждения: а) если два угла смежные, то один из них острый, а другой — тупой; б) если два угла смежные, то один из них больше другого?

7.5. Нарисуйте угол. Посмотрите на него в увеличительное стекло. Будет ли угол, который вы видите через стекло, больше, чем нарисованный угол?

7.2 **7.6.** Нарисуйте два неравных острых угла. Постройте их сумму и разность.

7.7. Нарисуйте угол. Из его вершины внутри его проведите луч.
а) Запишите исходный угол как сумму углов.
б) Запишите образованные на рисунке углы как разности углов.

7.8. На *рисунке 74* дугами отмечены равные углы. Какие еще равные углы есть на этом рисунке?

7.9. Нарисуйте $\angle ab$.
а) Отложите внутри его два равных угла: $\angle ac$ и $\angle bd$. Докажите, что $\angle ad = \angle bc$.
б) Два равных угла $\angle ac$ и $\angle bd$ отложите так, чтобы лучи c и d не лежали внутри данного угла. Верно ли, что $\angle ad = \angle bc$? Зависит ли ваше доказательство от расположения лучей на плоскости?

7.10. Нарисуйте угол α. Постройте угол 2α.

7.11. Каким по виду будет угол 2α, если угол α: а) прямой; б) острый; в) тупой?

7.3 **7.12.** Сколько пар неразвернутых вертикальных углов вы видите на *рисунке 74*?

7.13. а) Нарисуйте угол. Нарисуйте смежные с ним углы. Укажите на рисунке вертикальные углы.
б) Нарисуйте угол. Нарисуйте угол, вертикальный ему. Эти углы имеют общий смежный угол. Укажите его.

7.14. Нарисуйте треугольник. В каждой его вершине постройте угол, вертикальный углу треугольника. На сколько частей разбилась плоскость на вашем рисунке?

7.15. Нарисуйте прямую, а на ней отметьте точку A. Пусть AB и AC — два луча на этой прямой. Нарисуйте угол BAK. По другую сторону от прямой постройте угол CAM, равный углу BAK. Что вы заметили на рисунке? Как вы это объясните?

7.16. Про два угла известно следующее: а) у них есть общая вершина; б) их стороны лежат на двух данных прямых; в) сторона одного из них является продолжением стороны другого; г) они равны. Следует ли из какого-либо утверждения, что эти углы вертикальные? а из каких-либо двух?

7.4 **7.17.** Луч c является биссектрисой угла со сторонами a и b. Как это можно сказать иначе?

7.18. Нарисуйте луч a. Постройте лучи b и c так, что $\angle ba = \angle ca$. Будет ли a биссектрисой угла между b и c?

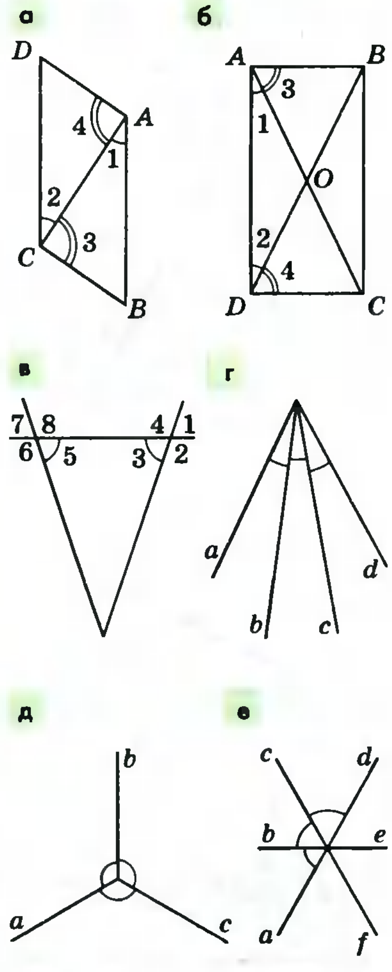


Рис. 74

7.19. Нарисуйте угол, отличный от развернутого. Постройте его биссектрису. Почему она составляет с его сторонами острые углы?

7.20. Нарисуйте треугольник. Постройте биссектрисы его углов. Что вы заметили?

7.21. На классной доске Федя нарисовал угол и построил его биссектрису. Пришел Вася и стер угол, а биссектрису оставил. Можно ли помочь Феде восстановить рисунок? А если Вася оставил не только биссектрису, но и одну точку на стороне угла? А если Вася оставил только часть биссектрисы и точку на стороне угла?

А если он оставил часть биссектрисы и две точки на сторонах угла?

7.22. Федя нарисовал на доске два угла, потом построил их сумму и разность. Пришел Вася, стер исходные углы, а сумму и разность оставил. Помогите Феде восстановить исходные углы.

7.23. а) На земле нарисован угол. Как разделить его пополам, имея в руках только веревку?

б) Сможете ли вы разделить пополам угол, нарисованный на листе бумаги, не имея никаких инструментов?

7.24. Нарисуйте прямую. Отметьте на ней точку. Циркулем и линейкой постройте перпендикуляр к ней в этой точке. Постройте затем еще перпендикуляр в этой точке, но по другую сторону от этой прямой. Что вы заметили? Как вы это объясните?

7.25. Нарисуйте отрезок. С помощью циркуля и линейки постройте перпендикуляр к нему в его конце.

§ 8 Величина угла

8.1 **Измерение углов.** Как каждый отрезок имеет величину —длину отрезка, так каждый угол тоже имеет некоторую величину.

Величина угла обладает следующими основными свойствами, аналогичными основным свойствам длины отрезка:

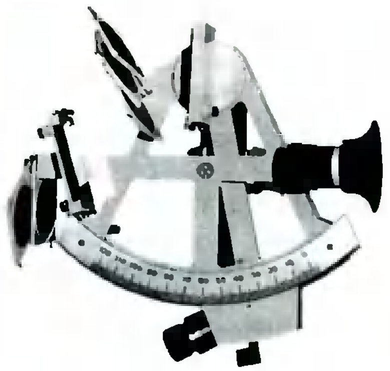
1. Величины равных углов равны.
2. При сложении углов их величины складываются.

Измерение углов подобно измерению отрезков: оно состоит в сравнении измеряемого угла с углом, принятым за единицу. Угол, принятый за единицу измерения (а если нужно, и его доли), откладывается на измеряемом угле. В результате получается численное значение величины угла при данной единице измерения. Это число показывает, сколько раз угол, принятый за единицу измерения, и его доли укладываются на данном угле.

За единицу измерения обычно принимают угол в один градус, т. е. $\frac{1}{90}$ часть прямого угла. Один градус обозначают так: $1°$.

Прямой угол имеет величину $90°$, развернутый угол — $180°$.

а



б

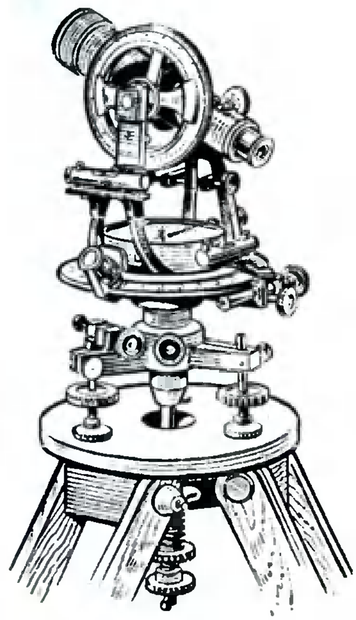


Рис. 75

Рис. 76

Градус делится на 60 минут, а минута — на 60 секунд. Одну минуту обозначают 1′, одну секунду — 1″. Если угол имеет величину 17 градусов 25 минут и 34 секунды, то пишут: 17°25′34″.

При большей точности берутся и доли секунды.

Угол и его величина — вещи разные. Тем не менее удобно писать, например, $\angle A = 30°$. Эта запись означает, что величина угла A равна 30°. И говорим при этом: «Угол равен 30°». Можно писать и так: $\angle ab = 30°$, $\alpha = 30°$ и т. п.

8.2 **Свойства численных значений величин углов.** Для численных значений величин углов выполняются такие же свойства, как и для численных значений длин отрезков (см. п. 4.4). Коротко это можно выразить одной фразой: между действиями над углами и действиями над их величинами имеется полное соответствие. Это означает следующее:

1. а) Если углы равны, то их величины равны. б) Обратно: если величины углов равны, то углы равны.

2. а) Если первый угол больше второго, то и величина первого угла больше. б) Обратно: если величина первого угла больше величины второго угла, то первый угол больше.

3. При сложении углов их величины складываются, а при вычитании вычитаются.

8.3 **Измерение углов на практике.** Полный угол вокруг точки состоит из двух развернутых углов и, стало быть, составляет 360°. Возможно, выбор такого числа был связан с тем, что в древности полагали в году 360 дней, и с системой счисления в Древнем Вавилоне, в котором особое место занимало число 60.

Самый простой прибор для измерения углов — транспортир. Но есть и другие приборы: секстант (в морском деле; *рис. 75, а*), буссоль (в артиллерии), теодолит (при измерениях на земле; *рис. 75, б*), гониометр (для измерения углов в кристаллах). В них углы отмечают на окружности, как это делается на транспортире. Тем самым отмечают углы, которые образуют радиусы, идущие в отмеченные точки окружности, с некоторым начальным радиусом.

Кроме градусной, есть и другие единицы измерения углов, более удобные в том деле, где они применяются: 1 радиан — в физике и в математике (примерно равен 57°), 1 румб — в морском деле (равен $\frac{1}{8}$ прямого угла).

8.4 **Двугранный угол.** Представление о двугранных углах дают двускатные крыши домов, приоткрытые двери, раскрытая книга и т. п. (*рис. 76*). Соответственно этому и дается определение.

Двугранным углом называются две полуплоскости, имеющие общую граничную прямую и не лежащие в одной

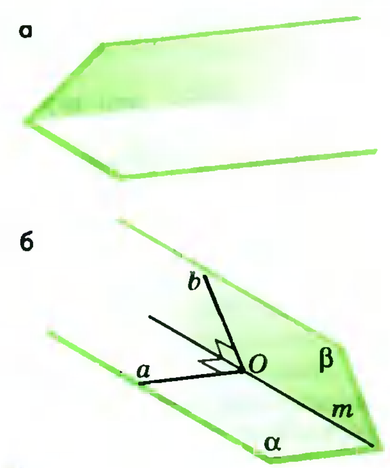


Рис. 77

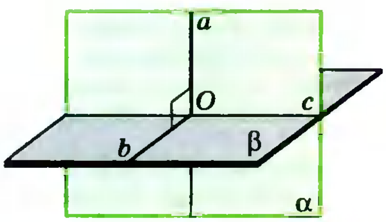


Рис. 78

плоскости (*рис. 77, а*). Сами эти полуплоскости называются **гранями** двугранного угла, а их общая прямая — **ребром** двугранного угла.

Измеряют двугранные углы так: в гранях двугранного угла из некоторой точки O на его ребре проводят лучи, перпендикулярные ребру (*рис. 77, б*). Эти лучи являются сторонами обычного плоского угла, который называется **линейным углом** двугранного угла. **Величиной двугранного угла** считается величина его линейного угла. Она не зависит от выбора вершины линейного угла на ребре двугранного угла.

Если величина двугранного угла равна 90°, то плоскости граней такого двугранного угла называются **взаимно перпендикулярными** (*рис. 78*).

Мы говорим «угол многоугольника», подразумевая при этом угол между его соседними сторонами. Точно так же мы будем говорить **двугранный угол многогранника** между его соседними гранями, т. е. гранями, имеющими общее ребро.

1. Какие свойства имеет величина угла?
2. Что такое 1°? 1′? 1″?
3. Перечислите свойства численного значения величины угла.
4. Что такое двугранный угол и как его измеряют?

Задачи к § 8

8.1. Нарисуйте на глаз углы в 90°, 45°, 30°. Проверьте себя. Нарисуйте затем на глаз сначала углы в 10°, 40°, 60°, 80°, а затем углы в 120°, 135°, 150° и проверьте себя.

8.2. Постройте лучи a и b так, что $\angle ab = 50°$.
а) Постройте луч c внутри угла ab так, что $\angle ca = 30°$. Вычислите $\angle cb$.
б) Вычислите $\angle cb$, если луч c будет построен вне $\angle ab$, причем $\angle ca = 30°$.
в) Как изменится решение в задаче б), если $\angle ca = 70°$?

8.3. а) Два угла величиной 40° и 50° имеют общую сторону. Какой угол могут образовывать другие их стороны?
б) Ответьте на вопрос задачи а), если даны углы 140° и 150°.

8.4. а) Луч c лежит внутри угла ab, равного 120°, и образует со стороной a угол 80°. Чему равен угол между лучом c и биссектрисой данного угла?
б) Ответьте на вопрос задачи а), если луч c лежит вне данного угла.

8.5. а) Сколько градусов содержится между двумя минутными делениями циферблата часов?
б) Сколько градусов образуют стрелки часов, когда они показывают: 13.00, 15.30, 14.45, 10.55, 21.01?
в) Назовите какое-либо время, когда стрелки часов образуют угол 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, 180°.

8.6. Углы ab и bc смежные, луч p — биссектриса угла ab. Луч q идет внутри угла bc из его вершины. Докажите, что q — биссектриса угла bc, если угол pq прямой.

8.7. Нарисуйте тетраэдр $ABCD$. Сколько двугранных углов у тетраэдра? Назовите их грани и ребра.

8.8. Нарисуйте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Сколько двугранных углов у куба? Назовите двугранные углы с ребрами AB, B_1C_1, CC_1. Назовите линейные углы этих двугранных углов.

8.9. Определите понятие «вертикальные двугранные углы». Докажите, что вертикальные двугранные углы равны.

8.10. Как бы вы определили понятие «биссекторная полуплоскость двугранного угла»? Как провести такую полуплоскость?

Задачи к I главе

1. Два отрезка лежат на одной прямой. а) Пусть их длины равны 5 см и 6 см, а длина их пересечения 2 см. Вычислите длину их объединения. б) Пусть их длины 5 см и 6 см, а длина их объединения 10 см. Вычислите длину их пересечения. в) Пусть первый отрезок имеет длину a, второй — длину b, длина их пересечения равна c, а длина их объединения равна d. Докажите, что $a+b=c+d$. г) Пусть длина одного из отрезков равна 4 см, длина их пересечения равна 1 см, длина их объединения равна 7 см. Вычислите длину второго отрезка. д) Пусть длины отрезков не меняются, а длина их пересечения стала увеличиваться. Что происходит с длиной их объединения? е) Пусть длины отрезков не меняются, а длина их объединения стала увеличиваться. Что происходит с длиной их пересечения?

2. Нарисуйте прямую, на ней отрезок AB и точку D — середину AB. Вне отрезка AB на прямой взята точка C. а) Пусть $CA=10$ см и $CB=2$ см. Вычислите расстояние от C до D. б) Пусть $CA=a$, $CB=b$. Докажите, что $CD=\frac{1}{2}(a+b)$. в) Пусть $CA=3$ см и $CD=5$ см. Вычислите длину CB.

3. Нарисуйте прямую, на ней отрезок AB и точку D — середину AB. Внутри этого отрезка взята точка C. а) Пусть $CA=10$ см, $CB=2$ см. Вычислите длину CD. б) Пусть $CA=a$, $CB=b$, причем $b>a$. Докажите, что $CD=\frac{1}{2}(b-a)$. в) Пусть $CA=3$ см и $CD=1$ см. Вычислите длину CB, зная, что $CB>CA$.

4. Пусть отрезок AB длиной d разбит точкой C на два отрезка. Вычислите расстояние между серединами этих отрезков.

5. На прямой лежат отрезки AB и CD, не имеющие общих точек. Известны их длины. Вам нужно вычислить расстояние между их серединами. Можете ли вы это сделать? Если нет, то что бы вы хотели знать еще?

6. Федя нарисовал прямую, отметил на ней две точки A и B, затем точку C внутри отрезка AB и построил середины K и L отрезков AC и CB. Пришел Вася и стал стирать отмеченные точки. Сможет ли Федя восстановить рисунок, если будут стерты: а) точка C; б) точка B; в) точки A и B; г) точки C и B; д) точки A, B и C?

7. Углы α_1 и α_2 имеют общую вершину, угол β — их объединение, угол γ — их пересечение. а) Пусть $\alpha_1=50°$, $\alpha_2=60°$, $\gamma=20°$. Вычислите β. б) Пусть $\alpha_1=50°$, $\alpha_2=60°$, $\gamma=100°$. Вычислите γ. в) Докажите, что $\alpha_1+\alpha_2=\beta+\gamma$. г) Пусть $\alpha_1=40°$, $\gamma=20°$, $\beta=70°$. Вычислите α_2. д) Пусть величины углов α_1 и α_2 одни и те же, а величина угла γ увеличивается. Что происходит с величиной угла β? е) Пусть величины углов α_1 и α_2 не меняются, а угол β увеличивается. Что происходит с γ?

8. Дан угол ab, луч d — его биссектриса, а луч c идет вне угла ab из его вершины. а) Пусть $\angle ca=100°$ и $\angle cb=20°$. Вычислите величину угла cd. б) Пусть $\angle ca=\alpha$ и $\angle cb=\beta$. Докажите, что $\angle cd=\frac{\alpha+\beta}{2}$. в) Пусть $\angle ca=30°$ и $\angle cd=50°$. Вычислите величину угла cb. г) Пусть луч c повернулся вокруг вершины угла ab на некоторый угол γ. Как изменился угол cd?

9. Дан угол ab, луч d — биссектриса угла ab, луч c идет из вершины угла ab внутри его. а) Пусть $\angle ca = 100°$, $\angle cb = 20°$. Вычислите величину угла cd. б) Пусть $\angle ca = \alpha$, $\angle cb = \beta$, причем $\beta > \alpha$. Докажите, что $\angle cd = \frac{\beta - \alpha}{2}$. в) Пусть $\angle ca = 30°$, $\angle cd = 10°$. Вычислите величину угла cb, зная, что $\angle cb > \angle ca$.

Наверное, вы заметили, что задачи 7 — 9 про углы **аналогичны** (похожи) соответственно задачам 1 — 3 про отрезки. Эту аналогию можно продолжить. Составьте сами задачи про углы, аналогичные задачам 4, 5, 6 про отрезки, и решите их. Решать их можно тоже аналогично решениям соответствующих задач про отрезки, которые вы уже решили. Вот почему полезно подмечать **аналогию**.

10. Из шести равных квадратов вы хотите сделать куб. Эти шесть квадратов надо нарисовать на бумаге и одними только сгибаниями этого листа получить поверхность куба. Как расположить эти квадраты на листе бумаги? Нарисуйте различные способы расположения.

11. Диагональ куба — это отрезок, соединяющий его противоположные вершины (т. е. такие вершины, которые не лежат в одной и той же его грани). Перед вами много равных кубиков и линейка. Можете ли вы найти длину его диагонали?

12. Куб разрезали на два равных прямоугольных параллелепипеда. Сравните: а) сумму длин всех ребер одного из полученных прямоугольных параллелепипедов с суммой длин всех ребер исходного куба; б) сумму всех углов на поверхности одного из полученных прямоугольных параллелепипедов с суммой всех углов на поверхности куба.

13. Два куба с ребром 1 составили в один прямоугольный параллелепипед. Какова сумма длин всех его ребер? Ответьте на тот же вопрос, если таким образом составить десять кубов.

14. Из трех кубов с ребром 1 составляют многогранники, прикладывая кубы друг к другу по целым граням. Нарисуйте, какие могут получиться многогранники. Сравните суммы длин всех ребер этих многогранников.

II ГЛАВА Треугольники

В главе I мы изучали простейшие фигуры: отрезки, углы. В этой главе начинаем изучать, может быть, самую важную фигуру в геометрии — треугольник.

§ 9 Равенство треугольников

9.1 Теоремы и доказательства. В геометрии только самые начальные сведения берутся из практики и наблюдения, они наглядны и очевидны. Все дальнейшие утверждения получают путем рассуждений. Эти рассуждения называют **доказательством**. В результате доказательства становится ясным, что высказанное утверждение верно. Само утверждение, которое доказывается, называют **теоремой**.

Геометрия главным образом состоит из теорем и их доказательств. То, что говорится без доказательства, кроме аксиом, — это еще не геометрия, а отдельные сведения по геометрии. Мы уже доказали некоторые теоремы, например теорему о равенстве вертикальных углов. Теперь начнем доказывать теоремы о треугольниках.

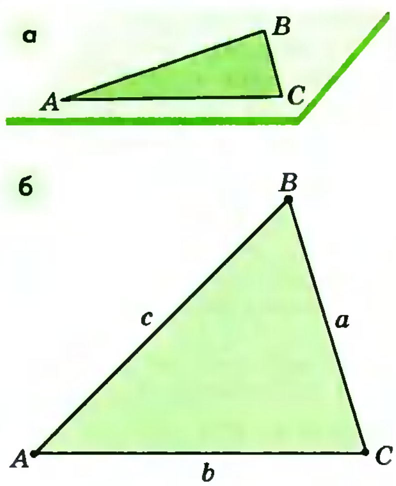


Рис. 79

9.2 Треугольник и его элементы. Виды треугольников. Вспомним, что такое треугольник. Возьмем три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой. Через эти три точки проходит некоторая (единственная) плоскость — плоскость ABC. Соединим взятые точки отрезками AB, BC, CA. Эти отрезки лежат в плоскости ABC и ограничивают в ней фигуру, которую называют треугольником (рис. 79, а). Итак, **треугольником** называют часть плоскости, ограниченную тремя отрезками.

Точки A, B, C называют **вершинами**, а отрезки AB, BC, CA — **сторонами** треугольника (рис. 79,б). Сам треугольник называют и обозначают по его вершинам: треугольник ABC или $\triangle ABC$.

Угол A треугольника ABC — это угол между сторонами AB и AC. В треугольнике ABC три угла: $\angle A$, $\angle B$, $\angle C$.

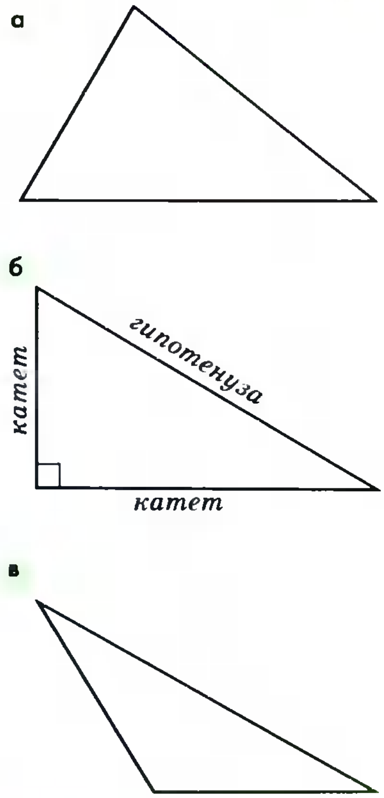


Рис. 80

В треугольнике ABC против вершины A лежит сторона BC. И наоборот, против стороны BC лежит угол A. Про вершину A и угол A говорят, что они **противолежащие** стороне BC. И о стороне BC говорят, что она **противолежащая** вершине A и **углу** A.

Сторону, противолежащую вершине A, часто обозначают буквой a. Точно так же сторона AC — противолежащая вершине (и углу) B. Эту сторону обозначают буквой b. А сторона AB — противолежащая вершине (и углу) C; ее обозначают буквой c.

Углы A и B в треугольнике ABC называют **прилежащими** к стороне AB. Точно так же углы B и C — прилежащие к стороне BC, а углы C и A — прилежащие к стороне CA. Стороны и углы треугольника называют его **элементами**.

По виду углов различают три вида треугольников: **остроугольные**, у которых все углы острые (рис. 80, а); **прямоугольные**, у которых один из углов прямой (рис. 80, б); **тупоугольные**, у которых один из углов тупой (рис. 80, в). То, что у треугольника может быть лишь один неострый угол, будет доказано в п.15.2.

Стороны прямоугольного треугольника, образующие прямой угол, называют **катетами**, а сторона, противолежащая прямому углу, называется **гипотенузой**.

Таким образом, все треугольники мы разбили по виду их углов на три класса, т. е. провели **классификацию** треугольников. В дальнейшем часто будем классифицировать геометрические фигуры. При этом надо следить за тем, чтобы одна и та же фигура не попадала в разные классы (как и ученики в школе).

9.3 Равенство углов треугольников. Можно ли по равенству одних элементов треугольников судить о равенстве их других элементов? Например, если стороны одного треугольника равны сторонам другого, то будут ли равны углы этих треугольников? Следующая теорема дает ответ на этот вопрос.

Теорема 1 *(о равенстве углов треугольников)*. **Если стороны одного треугольника соответственно равны сторонам другого треугольника, то соответственно равны углы этих треугольников.**

• **Доказательство.** Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ равны стороны: $A_1B_1=AB$, $B_1C_1=BC$, $A_1C_1=AC$ (рис. 81, а). (В формулировке теоремы именно эти равенства сторон заменены для краткости словом «соответственно».) Докажем, что в этих треугольниках против равных сторон лежат равные углы, т. е. : $\angle A_1=\angle A$, $\angle B_1=\angle B$, $\angle C_1=\angle C$. В формулировке теоремы именно эти равенства углов заменены для краткости словом «соответственно».

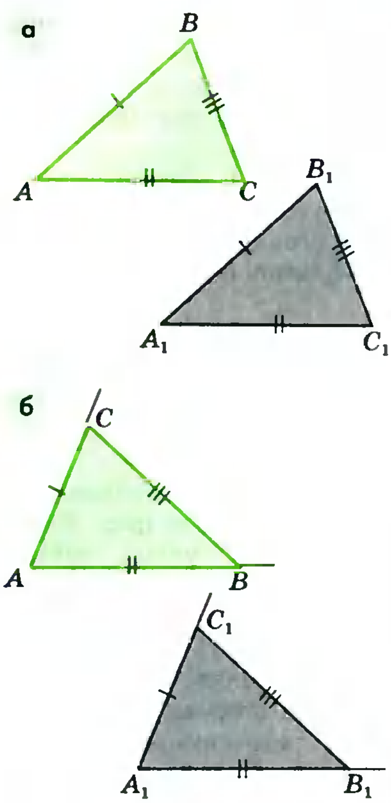


Рис. 81

Рассмотрим углы A_1 и A. Продолжим стороны треугольников за точки B_1, C_1 и B, C (рис. 81, б). Мы видим два угла A_1 и A, на сторонах которых отложены равные отрезки: $A_1B_1=AB$, $A_1C_1=AC$. Концы этих отрезков соединены отрезками B_1C_1 и BC. По условию теоремы они тоже равны: $B_1C_1=BC$. Тогда по определению равенства углов углы A_1 и A равны.

Совершенно так же убедимся, что $\angle B_1=\angle B$ и $\angle C_1=\angle C$.

А как вам убедиться, что вы поняли доказательство теоремы и можете ее рассказать? Начинайте с формулировки. Разграничьте условие теоремы и ее заключение. **Условие теоремы** — это то, что дано. Оно начинается обычно со слова «если». **Заключение теоремы** — это то, что надо доказать. Оно начинается чаще всего со слова «то». По условию теоремы сделайте рисунок (размерами побольше). Фигуры, данные в условии, обозначьте буквами. Запишите кратко, что дано.

В этой теореме запись данных такая:

Дано: $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$, $A_1B_1=AB$, $A_1C_1=AC$, $B_1C_1=BC$.

Запишите кратко, что надо доказать. В этой теореме запись такая:

Доказать: $\angle A_1=\angle A$, $\angle B_1=\angle B$, $\angle C_1=\angle C$.

Отметьте данные условными знаками на рисунке. Здесь равные отрезки отметьте одинаковым числом черточек. Запишите кратко доказательство. Для теоремы 1 это можно сделать так:

Доказательство:

Что утверждается	Из чего следует
1) $A_1B_1=AB$	Из условия теоремы
2) $A_1C_1=AC$	Из условия теоремы
3) $B_1C_1=BC$	Из условия теоремы
4) $\angle A_1=\angle A$	Из определения равных углов

Формулировку теоремы, ее краткую запись и краткое доказательство проговорите вслух. И не один раз. При этом фигуры, которые вы называете в этом рассказе, указывайте на рисунке. Попытайтесь весь свой ответ проговорить про себя. Будет совсем хорошо, если вы сможете провести доказательство теоремы с рисунком иным, чем в книге, и с другими обозначениями. Например, повторите доказательство теоремы 1 для треугольников, расположенных как-то иначе и названных KLM и $K_1L_1M_1$.

9.4 Равенство треугольников. Мы доказали, что из равенства сторон двух треугольников следует равенство их углов. В таких треугольниках оказались равными все элементы. Поэтому естественно дать

Определение. **Треугольники** называются **равными,** если равны их стороны.

(При этом надо понимать, что имеется в виду соответственное равенство их сторон, т. е. три стороны одного треугольника равны трем сторонам другого.)

Используя это определение, теорему 1 можно сформулировать как свойство равных треугольников:

в равных треугольниках против равных сторон лежат равные углы.

Как уже говорилось, равенство фигур удобно устанавливать сравнением отрезков. Поэтому и равенство треугольников определено по равенству их сторон.

В равных треугольниках соответственно равные элементы обычно обозначаются одинаковыми буквами, которым приписаны индексы. Например, если $\triangle A_1B_1C_1 = \triangle ABC$, то подразумеваются такие равенства: $A_1B_1 = AB$, $B_1C_1 = BC$, $C_1A_1 = CA$.

Равные треугольники уже появлялись у нас, когда мы формулировали в п.6.2 аксиому о свойстве равных углов — на рисунке 48 у треугольников OAB и $O_1A_1B_1$ соответственно равные стороны $OA = O_1A_1$, $OB = O_1B_1$ и $AB = A_1B_1$. Теперь, когда у нас появилось понятие о равных треугольниках, аксиоме о свойстве равных углов можно дать такую формулировку:

соответственные хорды отсекают от равных неразвернутых углов равные треугольники.

?

1. **Приведите пример теоремы, доказанной в главе I.**
2. **Что такое треугольник?**
3. **Какие элементы треугольника вы знаете?**
4. **Какие по виду бывают треугольники?**
5. **Как называют стороны прямоугольного треугольника?**
6. **Какие треугольники называются равными?**
7. **Какое свойство равных треугольников вы знаете?**

Задачи к § 9

9.2 **9.1.** Перечислите все треугольники на ***рисунке 82***.

9.2. Нарисуйте треугольник STK. В нем сторона ST лежит против вершины K. Как это можно сказать иначе? Сделайте то же для сторон SK и TK.

9.3. Вернитесь к ***рисунку 82***.

а) Выберите любую из обозначенных на нем точек. Назовите треугольники, в которых она является вершиной. Назовите стороны этих треугольников, которые лежат против нее.

б) Выберите любой из обозначенных на нем отрезков. Назовите треугольники, в которых он является стороной. Назовите их вершины, которые лежат против нее.

9.4 **9.4.** Какие треугольники на ***рисунке 83*** равны? Перечислите в них соответственно равные углы.

9.5. Нарисуйте отрезок AB.

а) По одну сторону от прямой AB нарисуйте два равных треугольника ABC_1 и ABC_2. Назовите на этом рисунке равные отрезки и равные углы.

б) По разные стороны от прямой AB нарисуйте два равных треугольника ABC и ABD. Задание то же, что в задаче а).

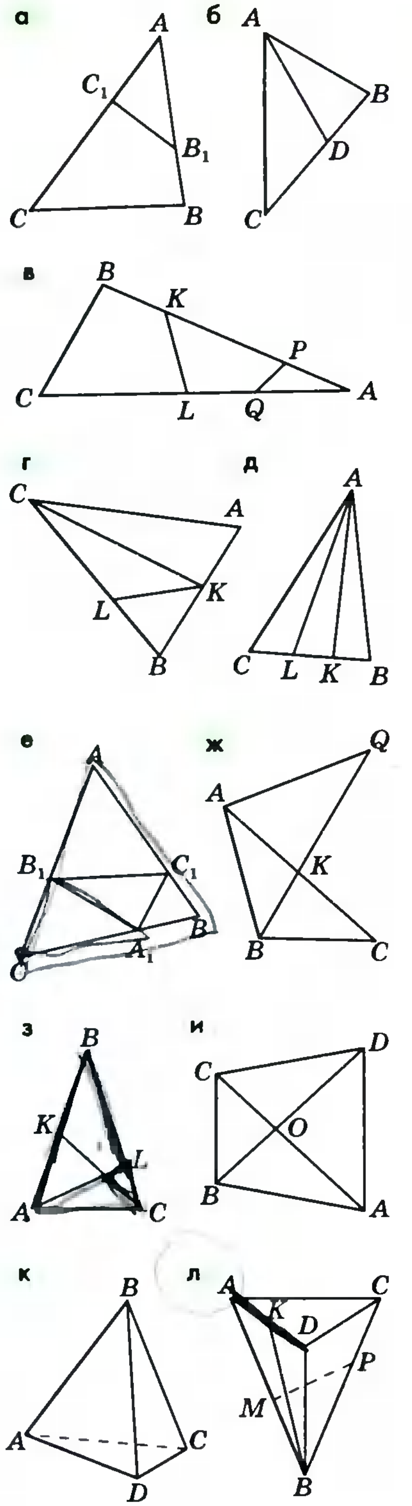


Рис. 82

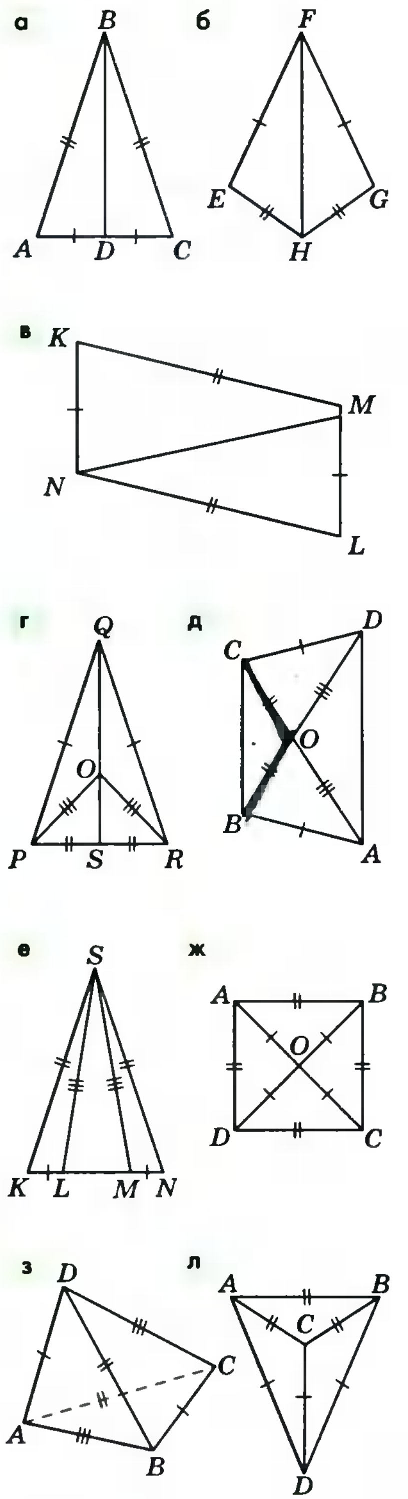


Рис. 83

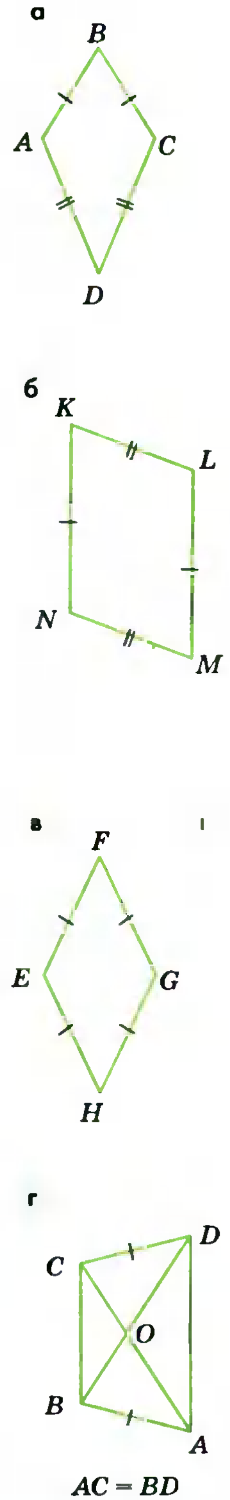


Рис. 84

9.6. Нарисуйте окружность с центром O.

а) Отметьте на ней точки A и B, не являющиеся концами одного диаметра. Постройте на ней точку C, такую, что $AB=BC$. Докажите, что хорды AB и BC видны из центра окружности под равными углами (т. е. углы AOB и BOC равны).

б) Отметьте на ней по часовой стрелке точки A, B, C, D, причем такие, что $AB=CD$. Докажите, что хорды AB и CD видны из центра под равными углами.

Решение. а) Чтобы доказать равенство углов, можно найти равные треугольники, в которых эти углы лежат. Здесь такими треугольниками являются треугольники AOB и BOC. Найдем в них равные элементы: сторона OB общая, $OA=OC$ как радиусы окружности и $AB=BC$ по условию. Значит, треугольники AOB и BOC равны по определению. В равных треугольниках против соответственно равных сторон лежат равные углы. Угол AOB лежит против AB, угол BOC лежит против BC. Поэтому $\angle AOB=\angle BOC$.

Сокращенная запись решения может выглядеть так:

1) $\angle AOB=\angle BOC$ по определению, так как OB — общая сторона, $OA=OC$ как радиусы, $AB=BC$ по условию.

2) $\angle AOB=\angle BOC$ из $\triangle AOB$ и $\triangle BOC$.

Не торопитесь переходить к другой задаче. Постарайтесь ответить на два вопроса: 1) Что еще можно доказать при этом условии? (Здесь, например, можно доказать, что $\angle A=\angle C$. А что еще?) 2) Можно ли прийти к заключению иначе, чем мы? (Здесь можно было бы вспомнить определение равных углов и доказать нужное равенство с его помощью.)

9.7. Постройте две окружности с общим центром (такие окружности называются **концентрическими**).

а) На меньшей из них отметьте точку A, а на большей постройте точки B_1 и B_2, такие, что $AB_1=AB_2$. Докажите, что AB_1 и AB_2 видны из O под равными углами.

б) Докажите утверждение, аналогичное а), взяв точку A на большей окружности, а точки B_1 и B_2 на меньшей.

9.8. Постройте окружность с центром O_1. Отметьте на ней точку O_2. Постройте окружность с центром O_2 радиусом O_2O_1. Обозначьте A и B точки пересечения этих окружностей.

а) Докажите, что отрезок AB виден из точек O_1 и O_2 под равными углами.

б) Докажите, что O_1O_2 виден из точек A и B под равными углами.

в) Какое из утверждений а) и б) будет верным, если радиус второй окружности будет отличен от O_2O_1?

9.9. Найдите равные углы в четырехугольниках на *рисунке 84*.

9.10. Будут ли равны два треугольника, если: а) для каждой стороны первого есть равная ей сторона во втором; б) кроме того, что дано в задаче а), выполняется и обратное: для каждой стороны второго есть равная ей сторона в первом?

§ 10 Признаки равенства треугольников

Очень важно при решении задач и доказательстве теорем увидеть равные треугольники. Чтобы объяснить их равенство, используют либо определение равных треугольников, либо признаки равенства треугольников. Их мы сейчас и докажем.

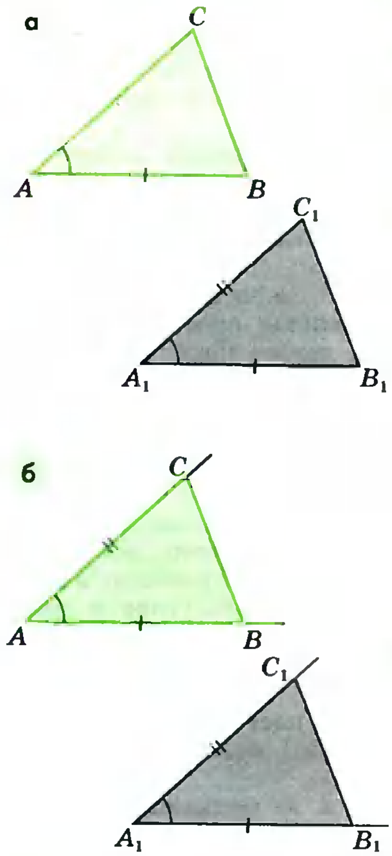


Рис 85

10.1 Первый признак равенства треугольников.

Теорема 2. **Если две стороны и угол, заключенный между ними, одного треугольника равны двум сторонам и углу, заключенному между ними, другого треугольника, то такие треугольники равны.**

Дано: $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$, $A_1B_1=AB$, $A_1C_1=AC$, $\angle A_1=\angle A$ (рис. 85, а).

Доказать: $\triangle A_1B_1C_1=\triangle ABC$.

• **Доказательство.** Рассмотрим равные углы A и A_1 треугольников ABC и $A_1B_1C_1$. Продолжим стороны этих треугольников за точки B, C и B_1, C_1 (рис. 85, б). Так как по условию теоремы $AB = A_1B_1$ и $AC = A_1C_1$, то отрезки BC и B_1C_1 являются соответственными хордами углов A и A_1. По условию теоремы углы A и A_1 равны. А согласно аксиоме о свойстве равных углов соответственные хорды отсекают от равных неразвернутых углов равные треугольники. Поэтому $\triangle ABC=\triangle A_1B_1C_1$.

10.2 Построение треугольника по двум сторонам и углу между ними.

Задача. Построить треугольник по двум сторонам и углу между ними.

Дано: отрезки b, c и угол α (рис. 86, а).

Построить: треугольник со сторонами b, c и углом α между ними.

Построение. Построим луч l с началом A (рис. 86, б) и отложим на нем отрезок $AB=c$ (рис. 86, в). Затем по любую сторону от луча l отложим угол $BAM=\alpha$ (рис. 86, г). На его стороне AM отложим отрезок $AC=b$ (рис. 86, д). Проведем BC и получим искомый $\triangle ABC$ (рис. 86, е).

Исследование. Здесь мы ответим на два вопроса: 1) Всегда ли задача имеет решение? 2) Сколько решений имеет задача?

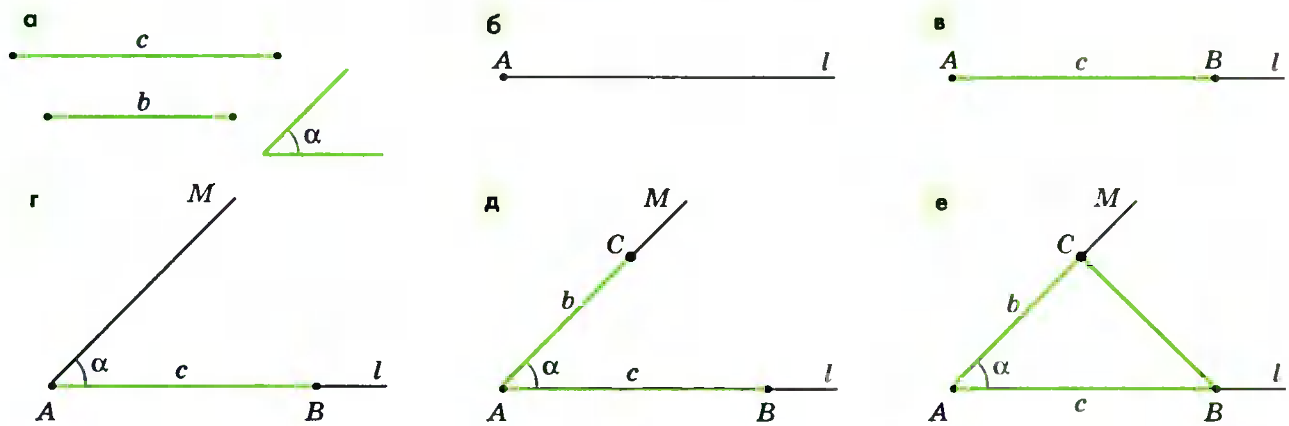


Рис. 86

Ответ на первый вопрос прост: все построения, которые были сделаны, возможны для любых отрезков b, c и любого угла α. Поэтому задача всегда имеет решение.

Ответим на второй вопрос. Каждый из вас построил такой треугольник в тетради. Сколько человек в классе — столько треугольников. Но все построенные вами треугольники равны (по первому признаку равенства треугольников). В геометрии считают, что в этом случае задача имеет единственное решение.

10.3 Второй признак равенства треугольников.

Теорема 3. **Если сторона и два прилежащих к ней угла одного треугольника равны стороне и двум прилежащим к ней углам другого треугольника, то такие треугольники равны.**

Дано: $\triangle ABC$, $\triangle A_1B_1C_1$, $A_1B_1=AB$, $\angle A_1=\angle A$, $\angle B_1=\angle B$ (*рис. 87*).

Доказать: $\triangle A_1B_1C_1=\triangle ABC$.

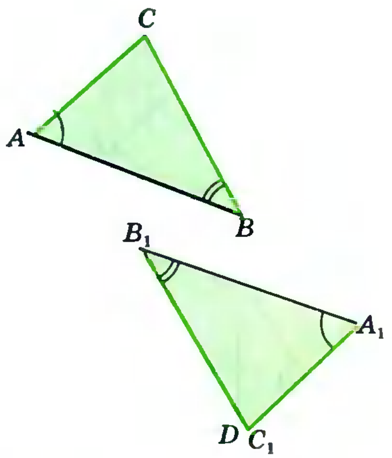


Рис. 87

• **Доказательство.** Чтобы доказать теорему, установим равенства $B_1C_1=BC$, $A_1C_1=AC$. Для этого на отрезке A_1B_1 по ту сторону от прямой A_1B_1, где лежит точка C_1, построим $\triangle A_1B_1D$, равный $\triangle ABC$. Выполним это построение так, чтобы $A_1D = AC$, $B_1D = BC$.

Докажем, что точка D совпадает с точкой C_1.

Так как $\triangle A_1B_1D=\triangle ABC$, то $\angle DA_1B_1=\angle A$ (по теореме 1). Так как по условию $\angle A=\angle A_1$, то $\angle DA_1B_1=\angle A_1$. Из аксиомы откладывания угла вытекает, что точка D лежит на луче A_1C_1.

Точно так же рассуждая, получим, что точка D лежит на луче B_1C_1. Поэтому точка D является точкой пересечения лучей A_1C_1 и B_1C_1, т. е. точка D совпадает с точкой C_1.

Из этого следует, что $A_1D=A_1C_1$, и так как $A_1D=AC$, то $A_1C_1=AC$. Точно так же $B_1C_1 = BC$. Итак, $\triangle A_1B_1C_1=\triangle ABC$.

?

1. Какие вы знаете признаки равенства треугольников?
2. На какие вопросы отвечает исследование, проведенное в задаче на построение?

Задачи к § 10

10.1. Докажите, что два прямоугольных треугольника равны, если катеты одного из них соответственно равны катетам другого.

10.2. Докажите, что два прямоугольных треугольника равны, если катет и прилежащий к нему острый угол одного из них равны катету и прилежащему к нему острому углу другого.

10.1 **10.3.** На *рисунке 88* укажите равные треугольники. Укажите в них соответственно равные стороны и углы.

10.4. Нарисуйте два равных треугольника. Отметьте середины соответственно равных сторон. Соедините их отрезками с противоположными вершинами. Какие еще треугольники на этом рисунке равны? Укажите на нем равные отрезки и равные углы.

10.5. Нарисуйте два равных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$.
а) Пусть точки K и K_1 лежат на сторонах AB и A_1B_1, причем $AK=A_1K_1$; точки L и L_1 лежат на сторонах BC и B_1C_1, причем $BL=B_1L_1$; точки M и M_1 лежат на сторонах CA и C_1A_1, причем $CM=C_1M_1$. Нарисуйте треугольники KLM и $K_1L_1M_1$. Докажите, что треугольники ALM и $A_1L_1M_1$ равны. Какие еще треугольники равны на этом рисунке?
б) Ответьте на вопрос задачи а), если точки K, K_1, L, L_1, M, M_1 брать не на сторонах треугольников, а на их продолжениях за соответствующие вершины.

10.6. а) Какие из отмеченных на *рисунке 89* точек равноудалены друг от друга?
б) Рассмотрите углы, заданные тремя точками на *рисунке 89*. Какие из них равны?

10.7. Нарисуйте угол ab с вершиной O. Нарисуйте его биссектрису. На сторонах угла отложите равные отрезки OA и OB, а на биссектрисе отметьте точку C. Докажите, что: а) $CA=CB$; б) прямые AB и OC перпендикулярны.

10.8. Нарисуйте окружность. Пусть две ее хорды AB и CD видны из центра под равными углами. Докажите, что $AB=CD$.

10.9. Нарисуйте окружность и ее диаметр AB. Пусть две точки окружности одинаково удалены от A. Докажите, что они одинаково удалены от B.

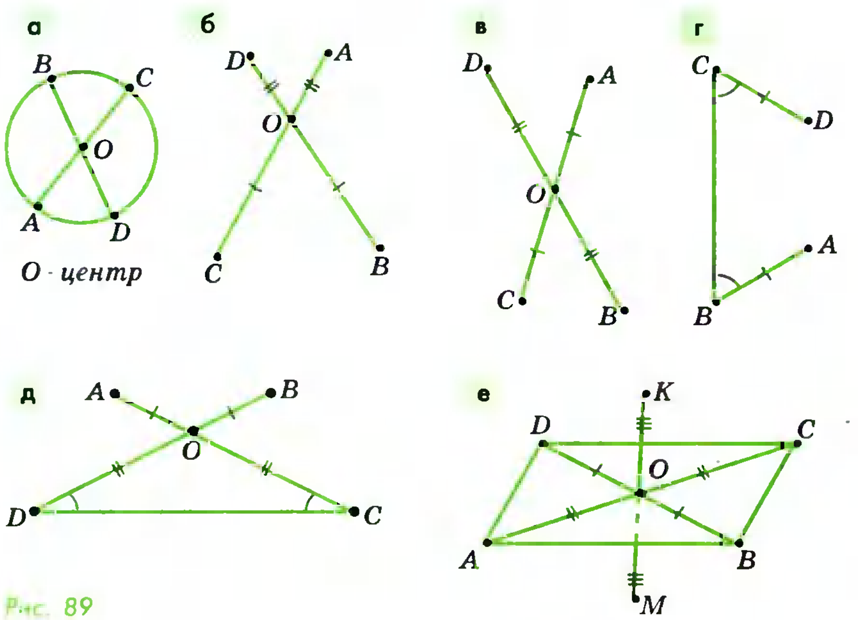


Рис. 89

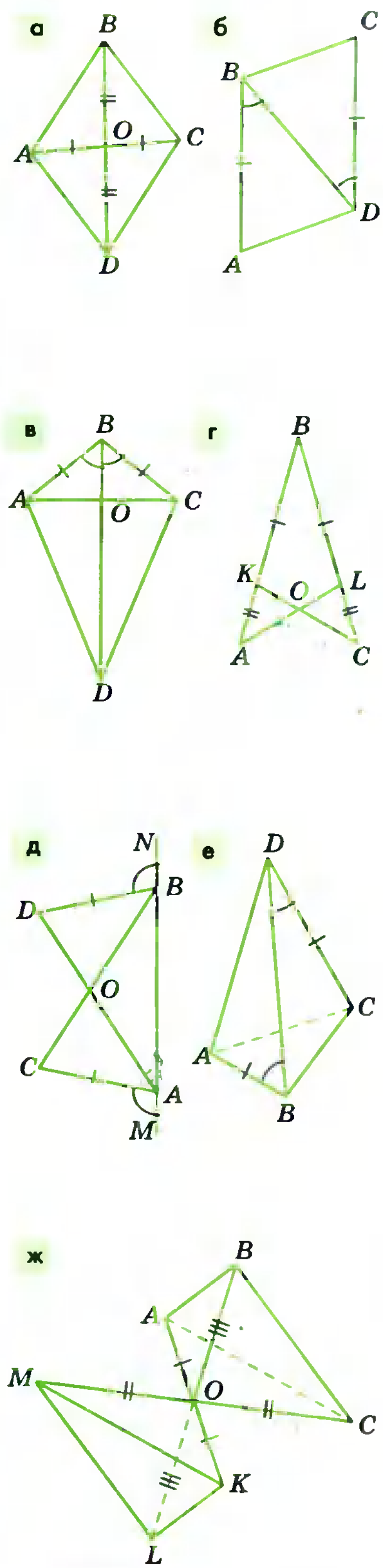


Рис. 88

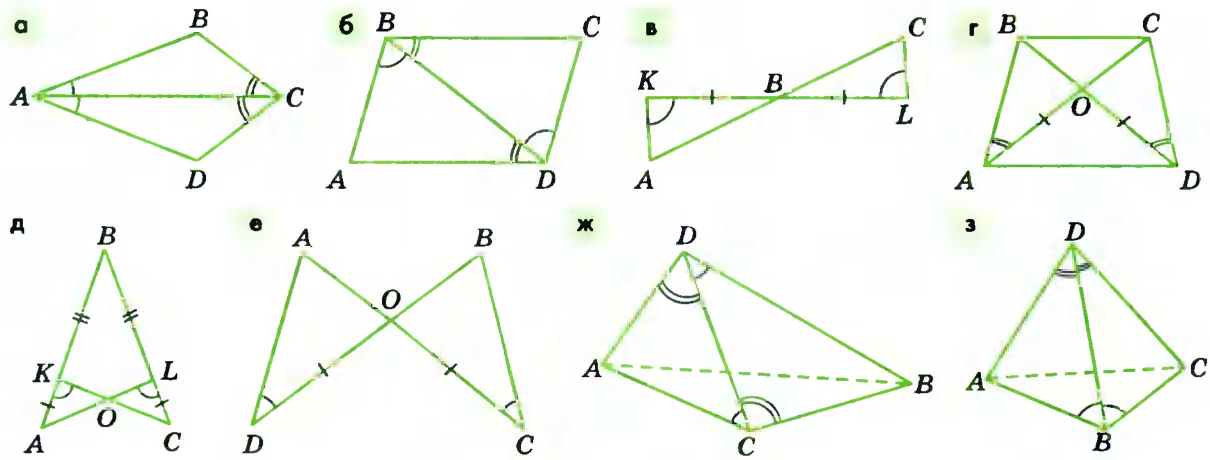


Рис. 90

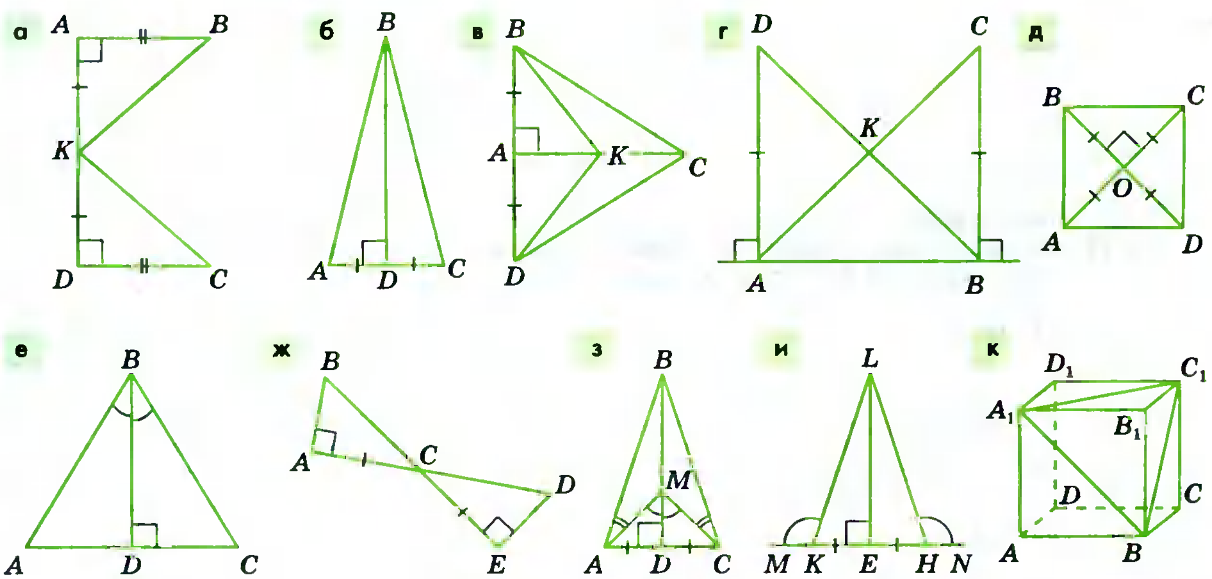


Рис. 91

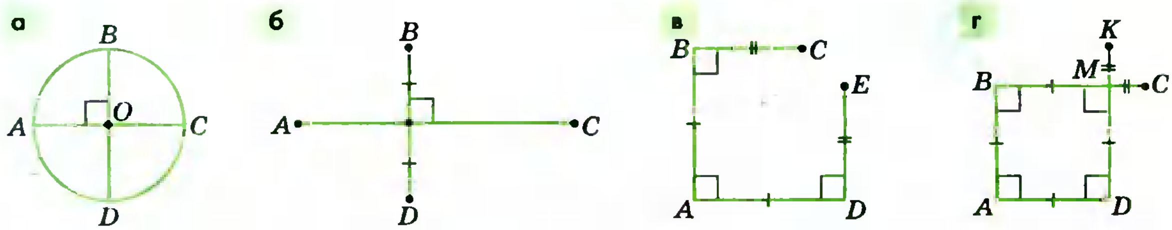


Рис. 92

10.10. Нарисуйте окружность, а в ней диаметр AB. Пусть две точки окружности C и D таковы, что $AC=BD$. Докажите, что $AD=BC$. (Надо рассмотреть два случая. Какие?)

10.2 **10.11.** Нарисуйте треугольник ABC. Постройте треугольник ABK, равный треугольнику ABC. Сколько таких треугольников можно построить?

10.12. а) Постройте треугольник со сторонами 3 см, 4 см и углом между ними 70°. Измерьте его третью сторону и вычислите его периметр.
б) Постройте треугольник со сторонами 5 см, 5 см и углом между ними 150°. Измерьте его третью сторону. Вычислите его периметр.
в) Постройте прямоугольный треугольник с катетами 2 см и 4 см. Измерьте его гипотенузу.

10.13. Восстановите треугольник, от которого остались сторона и точка пересечения биссектрис углов треугольника, прилежащих к этой стороне.

10.3 **10.14.** На ***рисунке 90*** укажите равные треугольники. Укажите в них соответственно равные стороны и углы.

10.15. Нарисуйте два равных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$.
а) Проведите луч из точки A, который пересекает сторону BC в точке K. Из вершины A_1 тоже проведите луч, который пересекает отрезок B_1C_1 в точке K_1 и при этом $\angle B_1A_1K_1=\angle BAK$. Какие еще есть равные треугольники на этом рисунке?
б) Ответьте на этот вопрос, если точки K и K_1 лежат на продолжениях отрезков BC и B_1C_1.
в) Нарисуйте два равных треугольника, а в них биссектрисы соответственно равных углов. Докажите, что их отрезки, лежащие в треугольниках, равны.

10.16. На ***рисунке 91*** укажите равные треугольники, сначала прямоугольные, а потом, если есть, и другие. В случае к) $ABCDA_1B_1C_1D_1$ — куб.

10.17. Между какими точками на ***рисунке 92*** расстояния равны?

10.18. Нарисуйте угол и его биссектрису. Через точку на биссектрисе проведите прямую, ей перпендикулярную. Докажите, что она отсекает на сторонах угла равные отрезки.

10.19. а) Нарисуйте отрезок AB. Через точки A и B проведите прямые a и b, перпендикулярные AB. Через середину отрезка AB проведите любую прямую. Пусть она пересекает прямые a и b в точках A_1 и B_1. Докажите, что $AA_1=BB_1$.
б) Из концов отрезка AB проведите к нему два равных перпендикуляра AA_1 и BB_1 по разные стороны от AB. Докажите, что отрезок A_1B_1 пересекает отрезок AB в середине.

10.20. Федя нарисовал треугольник на бумаге и собирался вычислить его периметр. Пришел Вася и оторвал часть треугольника вместе с вершиной. Помогите Феде вычислить периметр треугольника.

10.21. На бумаге нарисуйте треугольник. Сгибая лист, получите треугольник, равный данному.

§ 11 Серединный перпендикуляр

Теоремы о треугольниках помогут нам решить две важные задачи на построение: разделить отрезок пополам и построить перпендикуляр к прямой, проходящий через данную точку.

11.1 Деление отрезка пополам.

Задача. Разделить данный отрезок пополам, т. е. построить его середину.

Дано: отрезок AB.

Построить: точку C отрезка AB, такую, что $AC=CB$.

Построение. Опишем окружности с центрами A и B одним радиусом, равным AB (рис. 93, а). Они пересекутся в точках P и Q по разные стороны от прямой AB. Соединим точки P и Q отрезком. Он пересечет отрезок AB в точке C. Эта точка и будет серединой отрезка AB.

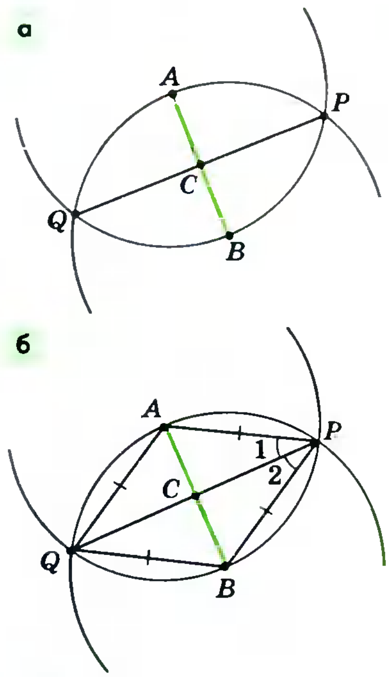


Рис. 93

• **Доказательство.** Рассмотрим треугольники APQ и BPQ (рис. 93, б). Они равны, так как $AP=BP$ и $AQ=BQ$ (по построению), а сторона PQ у этих треугольников общая. Соответственные углы в треугольниках APQ и BPQ равны. Значит, равны углы при их общей вершине P: $\angle 1=\angle 2$.

Рассмотрим теперь треугольники APC и BPC. У них стороны AP и BP равны. Сторона PC у них общая. Их углы 1 и 2 при вершине C равны как соответственные углы равных треугольников APQ и BPQ. По первому признаку равенства треугольников треугольники APC и BPC равны. Следовательно, равны их стороны AC и BC. А это и значит, что точка C — середина отрезка AB. □

11.2 Построение перпендикуляра.

Задача. Провести перпендикуляр к данной прямой через данную точку, не лежащую на этой прямой.

(Говорят еще так: *опустить перпендикуляр* из данной точки на данную прямую.)

Дано: прямая a и не лежащая на ней точка P (рис. 94).

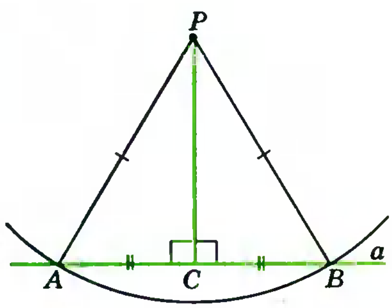


Рис. 94

Построить: точку C на прямой a, такую, что $PC\perp a$.

Построение. Проведем окружность с центром в точке P, которая пересекает прямую a в двух точках A и B. Затем построим точку C — середину отрезка AB (задача из п. 11.1). Отрезок PC и будет искомым перпендикуляром к a.

• **Доказательство.** Треугольники APC и BPC равны. Действительно, $PA=PB$ (как радиусы окружности), $AC=BC$ (точка C — середина отрезка AB), сторона PC у треугольников APC и BPC общая. В равных треугольниках APC и BPC соответственные углы PCA и PCB равны. А так как эти углы смежные, то они прямые: $PC\perp a$. □

11.3 Серединный перпендикуляр отрезка.

При решении обеих задач в пп. 11.1 и 11.2 мы строили прямую, перпендикулярную отрезку AB и пересекающую его в середине. Такая прямая называется серединным перпендикуляром отрезка AB. Итак, **серединный перпендикуляр отрезка** — это прямая, перпендикулярная этому отрезку и пересекающая его в середине. Точки серединного перпендикуляра обладают следующим важным свойством:

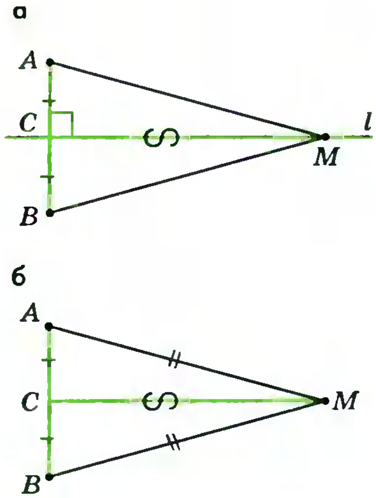


Рис. 95

Теорема 4 *(о серединном перпендикуляре).* **Каждая точка серединного перпендикуляра отрезка равноудалена от концов этого отрезка.**

Дано: отрезок AB, прямая l — серединный перпендикуляр отрезка AB, M — точка прямой l.

Доказать: $MA=MB$ *(рис. 95, а).*

• **Доказательство.** Прямая l пересекает отрезок AB в его середине — точке C. Треугольники MAC и MBC прямоугольные. В этих треугольниках $AC=BC$, так как C — середина AB. Сторона MC у них общая, и $\angle MCA=\angle MCB$, так как эти углы прямые. Поэтому $\triangle MAC=\triangle MBC$ (по первому признаку). Следовательно, их соответственные стороны MA и MB равны.

Верно и утверждение, обратное теореме 4:

если точка равноудалена от концов отрезка, то она лежит на серединном перпендикуляре этого отрезка.

Докажем это утверждение.

• Пусть $MA=MB$ и точка C — середина отрезка AB *(рис. 95, б).* Проведем отрезок MC. Тогда $\triangle AMC=\triangle BMC$ (по определению). Значит, $\angle ACM=\angle BCM$ (как соответственные углы в этих треугольниках). Так как они смежные, то $MC\perp AB$.

Приведем практический пример. Устанавливая вертикально мачту, прикрепляют к ней растяжки равной длины *(рис. 96).* Когда они натянуты, мачта оказывается перпендикулярной отрезку, соединяющему концы растяжек. Четыре растяжки в двух направлениях обеспечивают вертикальность мачты.

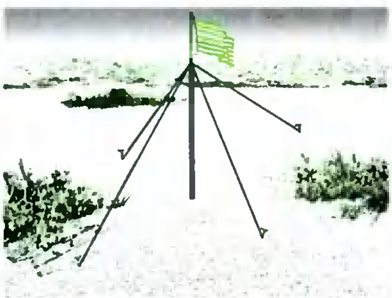


Рис. 96

11.4 Взаимно обратные утверждения.

Мы доказали два утверждения:

1. Если точка лежит на серединном перпендикуляре отрезка, то она равноудалена от концов отрезка.

2. Если точка равноудалена от концов отрезка, то она лежит на его серединном перпендикуляре.

Эти утверждения построены так: условие первого является заключением второго и, наоборот, условие второго — заключением первого. Такие утверждения называют **взаимно обратными**.

Приведем еще пример взаимно обратных утверждений:

1. Если отрезки равны, то длины их равны.

2. Если длины отрезков равны, то отрезки равны.

Не всегда взаимно обратные утверждения одновременно справедливы. Например, верно утверждение: если углы вертикальные, то они равны. Но обратное утверждение (если углы равны, то они вертикальные) неверно *(рис. 97).*

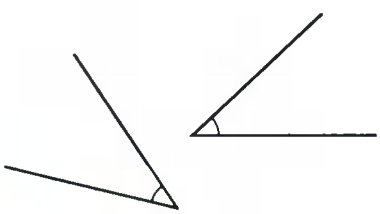


Рис. 97

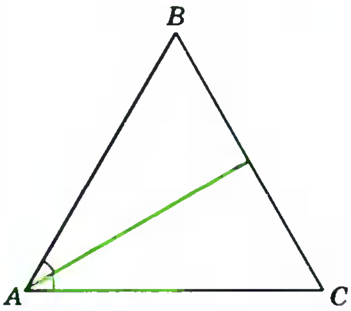


Рис. 98

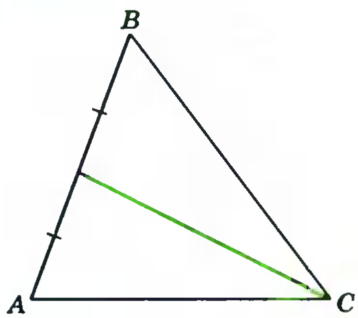


Рис. 99

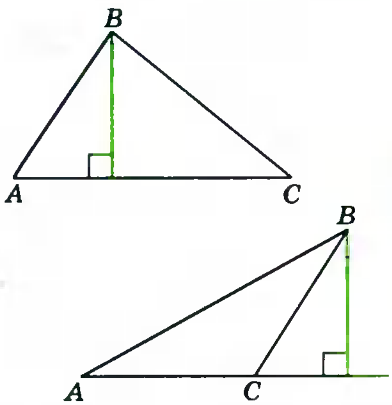


Рис. 100

11.5 Биссектриса, высота и медиана треугольника. Итак, мы теперь умеем делить пополам отрезки и углы, а также проводить перпендикуляры. Поэтому в треугольниках мы можем строить биссектрисы, высоты и медианы. Дадим их определения.

Биссектрисой треугольника называется отрезок биссектрисы угла треугольника от вершины до противоположной стороны (рис. 98).

Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противоположной стороны треугольника (рис. 99).

Высотой треугольника называется перпендикуляр, опущенный из вершины треугольника на его противоположную сторону или ее продолжение (рис. 100).

Медианы, биссектрисы и высоты треугольника тоже называют его элементами.

Из каждой вершины треугольника исходят биссектриса, медиана и высота. Эти отрезки, вообще говоря, различны. Случай, когда они совпадают, рассмотрен в следующем параграфе.

Замечание. Обратим ваше внимание на то, что при изображении пространственных фигур середина отрезка изображается как середина его изображения, которое тоже является отрезком. Поэтому, например, медианы граней тетраэдра на его изображении являются медианами изображений граней. А величины углов при изображении не сохраняются (например, прямые углы верхней и нижней граней куба изображаются как острые и тупые углы). Высоты и биссектрисы граней тетраэдра на их изображениях, как правило, высотами и биссектрисами не являются.

1. Как разделить циркулем и линейкой отрезок пополам?
2. Как провести перпендикуляр из точки на прямую?
3. Каким свойством обладают точки, лежащие на серединном перпендикуляре к отрезку?
4. Что такое биссектриса треугольника, медиана треугольника, высота треугольника?

Задачи к § 11

11.1. Нарисуйте отрезок. Нарисуйте окружность, которая проходит через его концы. Докажите, что ее центр лежит на серединном перпендикуляре этого отрезка.

11.2. Нарисуйте треугольник. Постройте серединные перпендикуляры двух его сторон. Пусть O — точка их пересечения. Докажите, что: а) O равноудалена от всех вершин треугольника; б) O лежит на серединном перпендикуляре третьей стороны.

11.3. Нарисуйте треугольник. Постройте три его медианы. Что вы заметили?

11.4. а) Нарисуйте остроугольный треугольник. Постройте в нем любые две высоты. Отметьте точку их пересечения. (При аккуратной работе она окажется внутри треугольника.) Проведите третью высоту. Что вы заметили?

б) Решите задачу, аналогичную задаче а), для тупоугольного треугольника. В чем разница в результатах в сравнении с задачей а)? А что одинаково?

в) Проделайте такие же построения, как в задачах а) и б), но для прямоугольного треугольника. В чем различие результатов данной и предыдущих задач? А что одинаково?

11.5. Сможете ли вы восстановить треугольник ABC по таким оставшимся на рисунке его элементам: а) медиане AK и вершине B; б) медиане AK и середине T стороны AB; в) одной медиане AK; г) высоте AP и вершине B; д) стороне AB и точке пересечения высот B; е) высоте AP и медиане AK; ж) высоте AP и медиане BL; з) высоте AP и биссектрисе AE; и) медиане AK и биссектрисе BF?

11.6. а) Нарисуйте остроугольный треугольник ABC. Постройте серединные перпендикуляры сторон AB и BC. (Если вы работали аккуратно, то они пересеклись внутри треугольника ABC.) Постройте теперь серединный перпендикуляр стороны AC. Что вы заметили?

б) Решите задачу, аналогичную предыдущей, для тупоугольного треугольника. Какая разница в результатах этой и предыдущей задач? А что общего?

в) Проделайте построения, аналогичные описанным в задаче а), но для прямоугольного треугольника. Какая разница в результатах? А что общего?

г) Если вы работали аккуратно, то во всех предыдущих задачах получали точку пересечения трех серединных перпендикуляров. Обозначим ее буквой O. Проведите теперь окружность с центром в точке O и радиусом OA. Что вы заметили? Как вы это объясните?

11.7. Пусть серединный перпендикуляр l отрезка AB пересекает его в точке O. Возьмем любые две точки X и Y прямой l. Докажите, что: а) отрезки OA и OB видны из точки X под равными углами (как это можно сказать иначе?); б) отрезок OX виден из A и B под равными углами; в) отрезок XY виден из A и B под равными углами.

11.8. Нарисуйте отрезок AB.

а) Пусть точка K такая, что $KA=KB$. Постройте серединный перпендикуляр отрезка AB. Объясните, почему он проходит через точку K.

б) Пусть точка M такая, что $MA \neq MB$. Объясните, почему она не лежит на серединном перпендикуляре.

11.9. Нарисуйте две точки A и B. Одним только циркулем постройте три точки, каждая из которых равноудалена от A и B. Докажите, что все три точки лежат на одной прямой.

11.10. Нарисуйте прямую и на ней отрезок AB. Можете ли вы построить серединный перпендикуляр отрезка AB, работая циркулем и линейкой лишь по одну сторону от данной прямой?

§ 12 Равнобедренный треугольник

Треугольник называется **равнобедренным**, если у него две стороны равны. Эти стороны называются **боковыми сторонами**, а третья сторона — **основанием** *(рис. 101, а)*.

Если все три стороны треугольника равны, то треугольник называется **равносторонним**. Равносторонний треугольник — частный случай равнобедренного треугольника *(рис. 101, б)*.

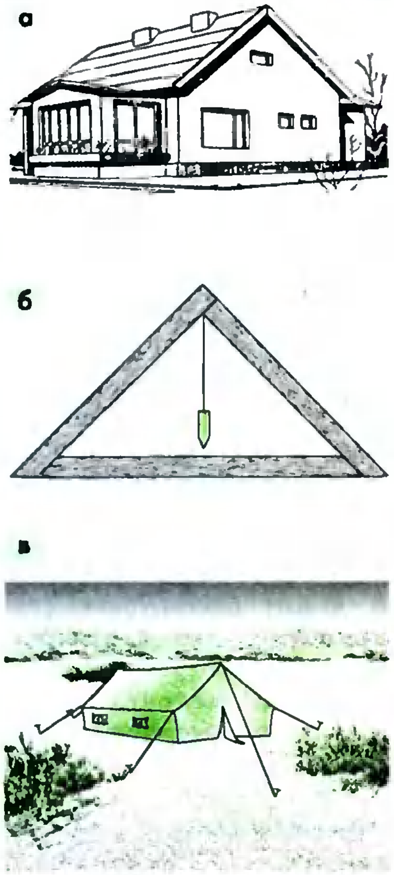


Рис. 102

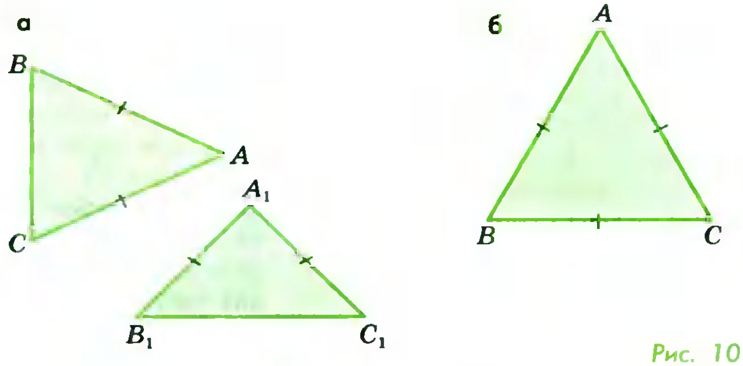


Рис. 101

Когда говорят «вершина равнобедренного треугольника» (если он не равносторонний), то имеют в виду общую точку его равных сторон.

Равнобедренные треугольники часто встречаются в практике. Например, дом с двускатной крышей выглядит с торцовой стороны как пятиугольник, составленный из прямоугольника и равнобедренного треугольника *(рис. 102, а)*. Крышу поддерживают наклонные балки — стропила. Каждая их пара одинаковой длины скрепляется с горизонтальной балкой, так что вместе они образуют стороны равнобедренного треугольника с горизонтальным основанием *(рис. 102, б)*. Передняя и задняя стенки палатки также образуют пятиугольник, составленный из равнобедренного треугольника и невысокого прямоугольника снизу *(рис. 102, в)*.

Равнобедренные треугольники обладают замечательными свойствами. Мы изучим их в этом параграфе.

12.1 Свойства равнобедренного треугольника.

Теорема 5. **В равнобедренном треугольнике: 1) углы при основании равны; 2) медиана, проведенная к основанию, является биссектрисой и высотой.**

Дано: $\triangle ABC$, $AB=AC$, AD — медиана.

Доказать: 1) $\angle B=\angle C$; 2) AD — биссектриса; 3) AD — высота *(рис. 103)*.

• **Доказательство.** Рассмотрим треугольники ABD и ACD. В них по условию $AB=AC$, $BD=CD$ (так как D — середина BC) и сторона AD общая. По определению $\triangle ABD=$ $=\triangle ACD$. Но тогда углы этих треугольников соответственно равны. Поэтому:

1) $\angle B=\angle C$;
2) $\angle BAD=\angle CAD$;
3) $\angle ADB=\angle ADC$.

Первое равенство означает, что доказано первое утверждение теоремы. Второе равенство означает, что AD — биссектриса. Третье равенство означает, что $AD\perp BC$. Следовательно, AD — высота.

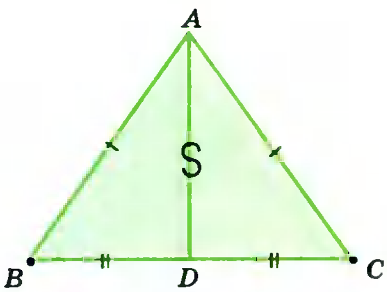


Рис. 103

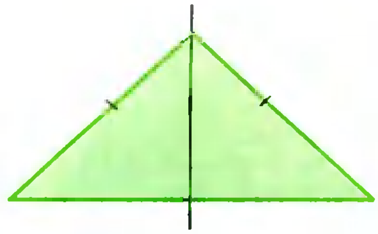


Рис. 104

12.2 ◆ **Понятие об осевой симметрии.** Еще одним замечательным свойством равнобедренного треугольника является его **симметричность**. Его **осью симметрии** является серединный перпендикуляр его основания *(рис. 104)*. Он проходит через вершину этого треугольника, так как она равноудалена от концов. Поэтому на серединном перпендикуляре лежит медиана, а значит, биссектриса и высота, проведенные из вершины. Ось симметрии разбивает равнобедренный треугольник на две равные части — на два треугольника, лежащие по разные стороны от оси. Эти части можно мысленно совместить, как бы перегибая треугольник по оси симметрии.

Не каждая фигура имеет оси симметрии. Например, нет осей симметрии у треугольника, все стороны которого различны. Но некоторые фигуры могут иметь и больше одной оси симметрии. Так, у равностороннего треугольника три оси симметрии *(рис. 105, а)*. У окружности и круга любая прямая, проходящая через их центр, является их осью симметрии *(рис. 105, б)*. Ось симметрии угла — прямая, на которой лежит биссектриса угла *(рис. 105, в)*, оси симметрии прямоугольника и квадрата изображены на *рисунках 105, г* и *105, д*.

О фигуре, имеющей ось симметрии, говорят, что она обладает **осевой симметрией**. Изучая разные фигуры, мы будем указывать их оси симметрии. ◆

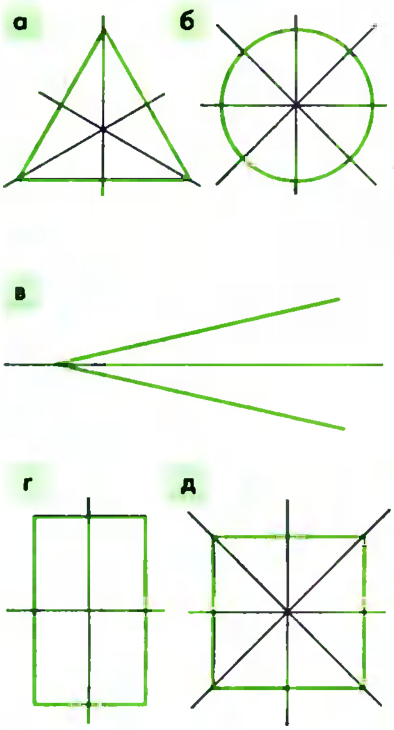


Рис. 105

12.3 **Признак равнобедренного треугольника.**

Теорема 6. **Если два угла треугольника равны, то он равнобедренный.**

Дано: $\triangle ABC$, $\angle B=\angle C$ (рис. 106).
Доказать: $AB=AC$.

• **Доказательство.** Пусть точка D — середина отрезка BC, а прямая l — серединный перпендикуляр стороны BC.

Мыслимы лишь такие три возможности:
1) l пересекает сторону AB (рис. 106, а);
2) l пересекает сторону AC (рис. 106, б);
3) l проходит через вершину A (рис. 106, в).

Докажем, что первые два случая невозможны. Этим мы установим, что точка A лежит на прямой l.

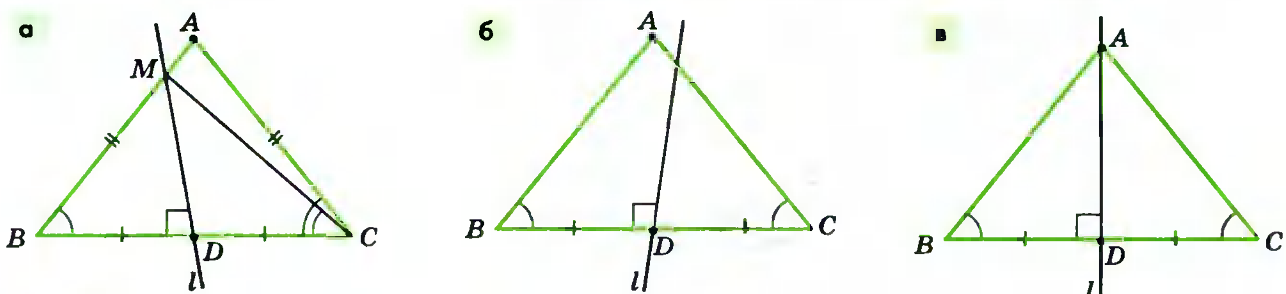


Рис. 106

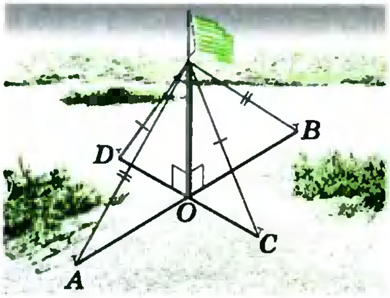


Рис. 107

Рассмотрим первый случай. Пусть прямая l пересекает отрезок AB в точке M. Поскольку M — точка серединного перпендикуляра отрезка BC, то $MB=MC$. Значит, треугольник MBC равнобедренный. А тогда равны его углы при основании: $\angle MCB=\angle B$. Так как $\angle B=\angle C$ по условию, то $\angle MCB=\angle C$. А это невозможно, так как $\angle MCB<\angle C$. Такой результат мы получили, допустив, что M лежит внутри AB. Следовательно, первый случай невозможен.

Точно так же не может быть, чтобы точка M лежала внутри AC (проведите соответствующие рассуждения).

Остается третий случай: прямая l проходит через точку A. Так как A лежит на серединном перпендикуляре отрезка BC, то $AB=AC$.

12.4 Перпендикулярность прямой и плоскости. Симметрия относительно плоскости. Вспомним практический пример об установке вертикальной мачты, рассмотренный в п. 11.3 (рис. 96). Вертикальность мачты MO (рис. 107) обеспечит ее перпендикулярность двум отрезкам AB и CD, лежащим в горизонтальной плоскости. Тогда окажется, что мачта MO перпендикулярна любой прямой, лежащей в горизонтальной плоскости и проходящей через точку O. Именно о таких прямой и плоскости говорят, что они взаимно перпендикулярны.

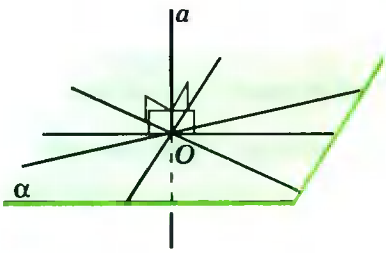


Рис. 108

Плоскость α и пересекающая ее в точке O прямая a называются **взаимно перпендикулярными**, если a перпендикулярна любой прямой, которая лежит в плоскости α и проходит через точку O (рис. 108). В этом случае говорят также, что **прямая a перпендикулярна плоскости** α, и пишут: $a\perp\alpha$.

Говорят, что **отрезок перпендикулярен плоскости**, если он лежит на прямой, перпендикулярной этой плоскости. Если отрезок перпендикулярен плоскости и его конец лежит в этой плоскости, то он называется **перпендикуляром к данной плоскости** (рис. 109).

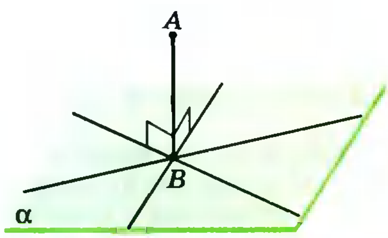


Рис. 109

Рассуждение об установке вертикальной мачты подсказывает нам следующий **признак** перпендикулярности прямой и плоскости:

если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна этой плоскости (рис. 110).

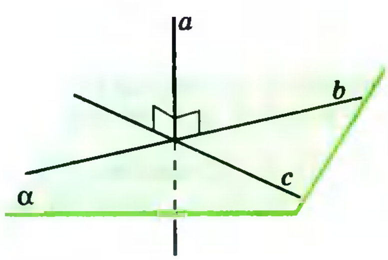


Рис. 110

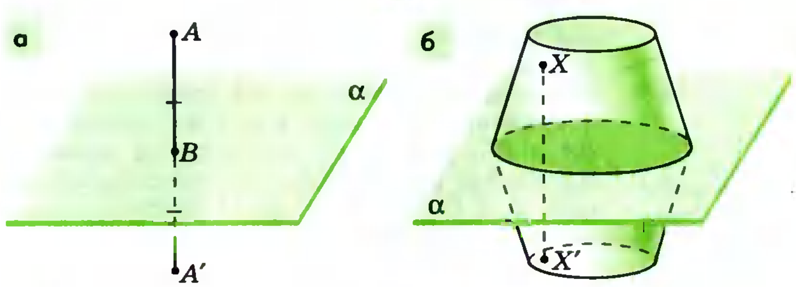


Рис. 111

Рис. 112

Две точки A и A' называются **симметричными относительно плоскости** α, если отрезок AA' перпендикулярен плоскости α и эта плоскость проходит через его середину *(рис. 111, а)*.

Говорят, что плоскость α является **плоскостью симметрии** некоторой фигуры, если эта фигура состоит из точек, попарно симметричных относительно плоскости α *(рис. 111, б)*. О фигуре, имеющей плоскость симметрии, говорят, что она обладает **зеркальной симметрией.** Архитектурные сооружения обычно обладают зеркальной симметрией *(рис. 112)*.

1. **Об одном и том же треугольнике Федя сказал, что он равнобедренный, а Вася сказал, что он равносторонний. Могут ли они оба быть правы? А если прав один, то кто?**

2. **Какие свойства равнобедренного треугольника вы знаете?**

3. **Какие признаки равнобедренных треугольников вы знаете?**

4. **Что значит: прямая и плоскость взаимно перпендикулярны?**

Задачи к § 12

12.1. а) Докажите, что в равностороннем треугольнике все углы равны.
б) Докажите, что треугольник, у которого все углы равны, является равносторонним.

12.2. Из вершины равнобедренного треугольника проведена его биссектриса. Докажите, что она является его: а) медианой; б) высотой.

12.3. В равнобедренном треугольнике из вершин основания провели медианы, высоты, биссектрисы. Докажите, что равны такие отрезки: а) медианы; б) биссектрисы; в) высоты. Какие выводы следуют из задач а) — в) для равностороннего треугольника?

12.4. Докажите такие признаки равнобедренного треугольника: треугольник является равнобедренным, если его высота является: а) медианой; б) биссектрисой. Какие из этого получаются признаки равностороннего треугольника?

12.1 **12.5.** Из вершины B равнобедренного треугольника ABC проведите медиану BK. На ней отметьте любую точку. Докажите, что: а) она равноудалена от точек A и C; б) из нее BA и BC видны под равными углами; в) из нее KA и KC видны под равными углами. Изменятся ли эти результаты, если точку взять на продолжении BK?

12.6. Нарисуйте равнобедренный треугольник ABC с вершиной B. Из вершины B одновременно и с одной и той же скоростью двинулись точки X и Y по сторонам BA и BC. Докажите, что в любой момент $XC=YA$.

12.7. Нарисуйте равнобедренный треугольник ABC с вершиной B. Проведите из вершин A и C: а) медианы; б) биссектрисы; в) высоты. Пусть K — точка их пересечения. Укажите на вашем рисунке равные треугольники. Что следует из их равенства?

12.8. а) Пусть боковая сторона равнобедренного треугольника равна 2 м, а основание равно 1 м. Чему равен его периметр?

б) Пусть боковая сторона равнобедренного треугольника равна a, а основание равно b. Запишите формулу для вычисления его периметра P. Выразите из этой формулы длину основания, длину боковой стороны.

в) Как называется зависимость периметра от основания при постоянной боковой стороне? А как называется зависимость периметра от боковой стороны при постоянном основании?

12.9. а) Чему равен периметр равностороннего треугольника со стороной 1 м?

б) Чему равен периметр P равностороннего треугольника со стороной a? Выразите из этой формулы длину стороны треугольника.

в) Как называется зависимость между периметром и стороной? Нарисуйте ее график.

12.3 **12.10.** Укажите на *рисунке 113* равнобедренные треугольники.

12.11. Какие треугольники на *рисунке 114* с вершинами в названных точках являются равнобедренными?

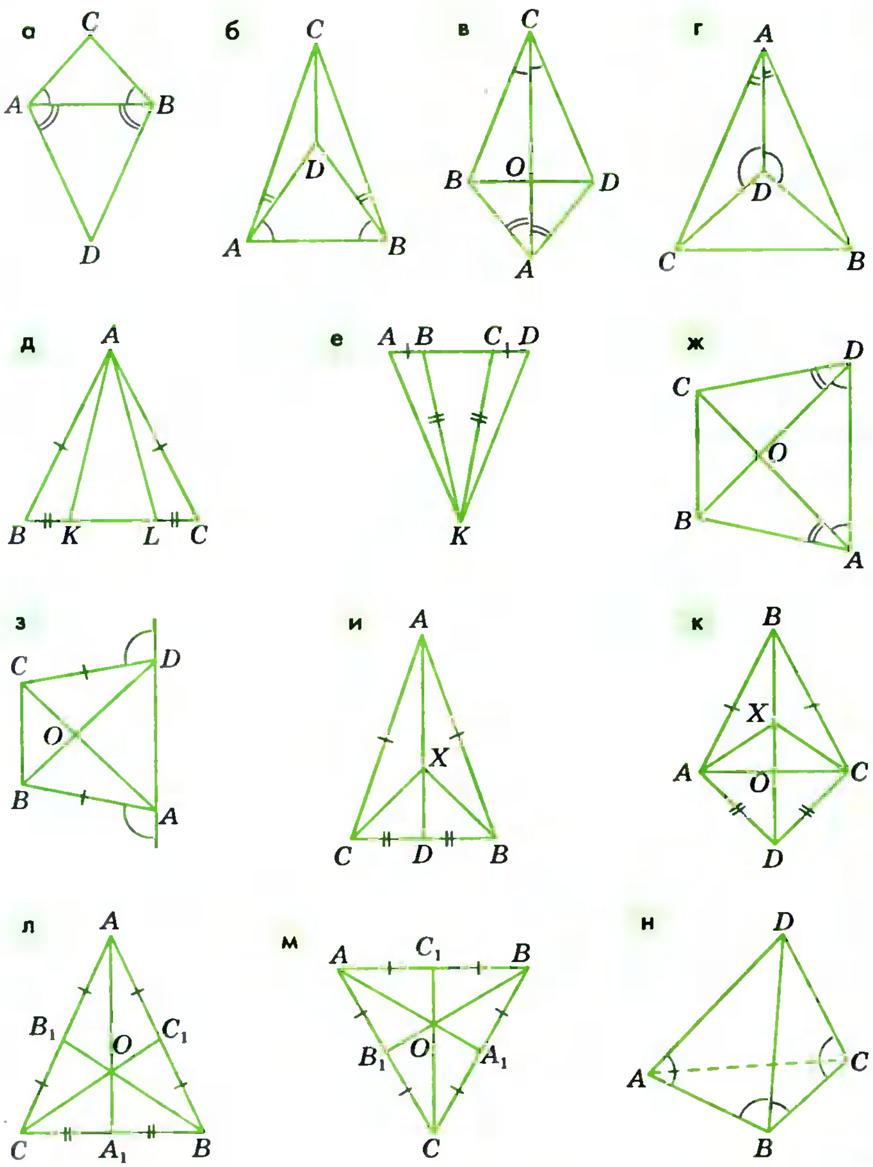


Рис. 113

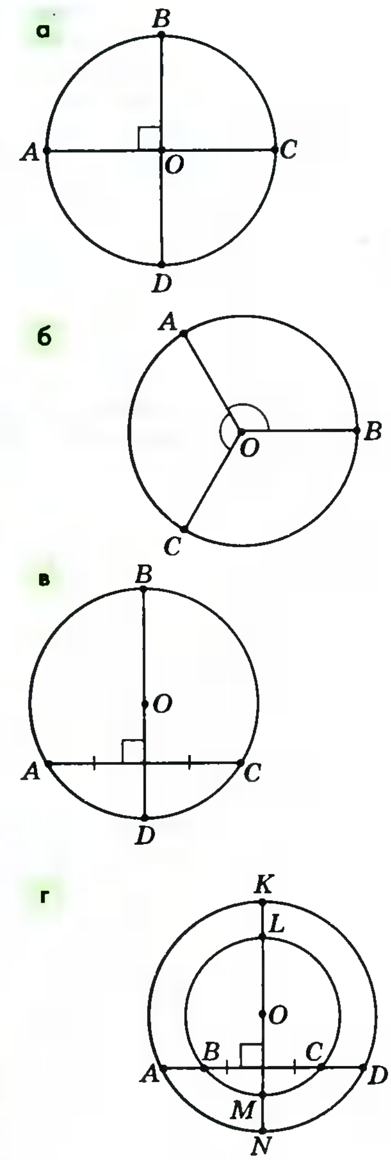


Рис. 114

12.12. По *рисунку 115* докажите, что треугольник $A_1B_1C_1$ равносторонний.

12.13. Нарисуйте любой угол, а потом его биссектрису. Отметьте на ней любую точку. Проведите через нее прямую, перпендикулярную биссектрисе.
а) Докажите, что она отсекает от угла равнобедренный треугольник.
б) Как по-вашему, может ли такая прямая в некотором угле отсечь равносторонний треугольник?

12.14. Сгибая несколько раз лист бумаги, получите: а) равнобедренный треугольник; б) равносторонний треугольник.

12.4 **12.15.** Нарисуйте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$.
а) Укажите его ребра, перпендикулярные грани $A_1B_1C_1D_1$.
б) Укажите грани, перпендикулярные ребру BC. Обоснуйте свои ответы.

12.16. Нарисуйте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Нарисуйте точки, симметричные точкам BCB_1C_1, относительно плоскости грани ADD_1A_1.

12.17. Два равнобедренных треугольника ABC и ABK имеют общее основание AB и не лежат в одной плоскости. Точка O — середина отрезка AB. Проведите медианы CO и KO. Докажите, что точки A и B симметричны относительно плоскости OCK.

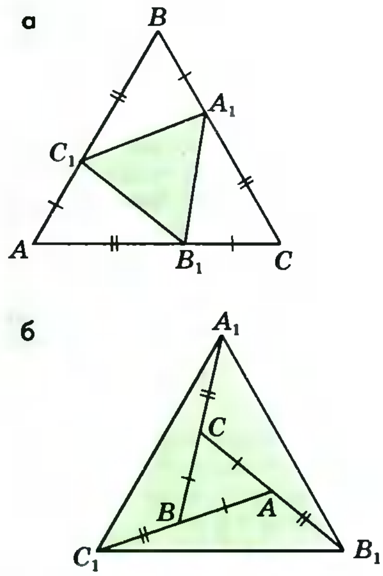


Рис 115

12.18. Два равнобедренных треугольника ABC и AKM имеют общую вершину A, общую медиану AO, проведенную к их основаниям, и не лежат в одной плоскости. Докажите, что медиана AO перпендикулярна плоскости, в которой лежат основания BC и KM.

12.19. В каком случае тетраэдр может иметь плоскость симметрии? Сколько их может быть? Сделайте рисунки.

Задачи к II главе

1. Докажите, что в равных треугольниках равны соответственные: а) медианы; б) биссектрисы; в) высоты.

2. Нарисуйте два равных треугольника ABC и $A_1B_1C_1$. На сторонах AC и A_1C_1 отметьте точки D и D_1, такие, что $AD=A_1D_1$. Проведите отрезки BD и B_1D_1. Найдите на рисунке равные треугольники. Как, опираясь на эту задачу, разрезать два равных треугольника на любое число соответственно равных треугольников?

3. а) Нарисуйте два равнобедренных треугольника с общим основанием. Проведите через их вершины прямую. Найдите на этом рисунке равные треугольники.
б) Нарисуйте три равнобедренных треугольника с общим основанием. Проведите прямую через их вершины (а почему три вершины лежат на одной прямой?). Найдите равные треугольники на этом рисунке. (Рассмотрите разные случаи расположения треугольников.)

4. Докажите, что равнобедренные треугольники равны по таким элементам: а) боковой стороне и основанию; б) боковой стороне и углу при вершине; в) основанию и углу при нем; г) основанию и высоте к нему; д) высоте, опущенной на основание, и углу при вершине. Найдите сами какой-нибудь признак равенства равнобедренных треугольников. Найдите сами признак равенства равносторонних треугольников.

5. Нарисуйте точки A и B, а также точку O, не лежащую на прямой AB. Нарисуйте точки A_1 и B_1 на прямых OA и OB так, чтобы точка O была серединой

отрезков AA_1 и BB_1. Проведите отрезки AB и A_1B_1. Проведите любую прямую, проходящую через O и пересекающую отрезки AB и A_1B_1 в точках C и C_1.
а) Докажите, что точка O — середина отрезка CC_1.
б) Докажите, что прямая CC_1 разбивает отрезки AB и A_1B_1 на соответственно равные отрезки.

6. Два отрезка AA_1 и BB_1 пересекаются и в точке пересечения O делятся пополам. Проведите отрезки AB и A_1B_1.
а) Отметьте точку C на AB и проведите прямую CO. Отложите на ней отрезок $OC_1=OC$. Докажите, что точка C_1 лежит на отрезке A_1B_1.
б) Решите задачу, аналогичную а), если точку C взять на прямой AB.

7. а) Нарисуйте прямую a. Отметьте точку A на a и точку B вне a. Нарисуйте отрезок AB, перпендикуляр BK на a и продолжите его на отрезок $KB_1=BK$. Нарисуйте AB_1. Отметьте точку X на AB. Постройте точку X_1 аналогично тому, как строили точку B_1. Докажите, что X_1 лежит на AB_1.
б) Придумайте задачу, аналогичную а), для случая, когда точки A и B лежат по одну сторону от прямой a; по разные стороны от прямой a.

8. В основании пирамиды $PABC$ лежит равносторонний треугольник ABC, и $PA=PB=PC$.
а) Пусть K, L, M — середины ребер AC, AB, BC соответственно. Докажите, что $PK=PL=PM$.
б) Пусть точка N — середина ребра PA. Докажите, что треугольник CNB равнобедренный. Будет ли он равнобедренным, если N — другая точка внутри этого ребра?
в) Пусть точка Q — середина ребра PB. Докажите, что треугольник CNQ равнобедренный.
г) Пусть точка S — середина ребра PC. Докажите, что треугольник NQS равносторонний.
д) Нарисуйте еще равнобедренные и равносторонние треугольники на поверхности этой пирамиды.

9. Тетраэдр, все ребра которого равны, называется **правильным**. Пусть в правильном тетраэдре $PABC$ точка K лежит внутри ребра AC. Докажите, что треугольник PKB равнобедренный.

10. В тетраэдре $PABC$ $\angle PAC=\angle PAB=90^\circ$ и $AB=AC$.
а) Докажите, что треугольник PBC равнобедренный.
б) При каком дополнительном условии треугольник PBC будет равносторонним?

11. Нарисуйте куб. Нарисуйте на его поверхности и притом не лежащий в какой-либо его грани: а) равнобедренный треугольник; б) равносторонний треугольник. Отметьте на его поверхности вершины правильного тетраэдра.

12. а) Нарисуйте правильный тетраэдр. Отметьте середину какого-либо его ребра. Предположим, что через эту точку провели всевозможные серединные перпендикуляры к этому ребру. Какая при этом образуется фигура в данном тетраэдре?
б) Решите аналогичную задачу для куба.

13. Отрезок AB симметричен относительно некоторой плоскости. Докажите, что для любой точки X этой плоскости выполняется равенство $XA=XB$.

III ГЛАВА Параллельность

Дальнейшее изложение геометрии (например, доказательство важнейшей теоремы о сумме углов треугольника) требует изучения параллельности. Это и будет сделано в настоящей главе.

§ 13 Параллельные прямые

13.1 Параллельные прямые и отрезки в теории и на практике. Напомним, что две **прямые** называются **параллельными**, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются. А **параллельные отрезки** — это отрезки, лежащие на параллельных прямых.

Параллельность прямых a и b обозначается так: $a \parallel b$ (рис. 116). Аналогично если отрезки AB и CD параллельны, то пишем: $AB \parallel CD$.

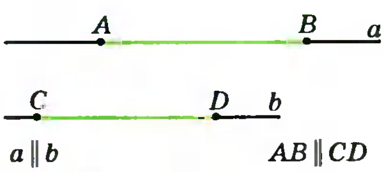


Рис 116

На практике постоянно приходится обеспечивать параллельность разнообразных «отрезков»: параллельные строчки в книгах, параллельные рельсы, параллельные края у окон, дверей, у крышек парт и столов и т. п. На практике параллельные прямые, как и другие неограниченные фигуры, конечно, не встречаются. Но в теории их рассматривать удобнее, чем параллельные отрезки.

Как строить параллельные прямые (точнее, отрезки) с помощью угольника и линейки, вам известно. Способ построения основан на том, что две параллельные прямые должны быть одинаково наклонены к третьей прямой (рис. 117, а). Теперь мы обоснуем этот способ, а также докажем и другие признаки параллельности. Параллельность прямых распознают по углам, которые они образуют с пересекающей их прямой. Дадим специальные наименования этим углам.

Пусть две прямые a и b пересечены третьей прямой c (ее называют **секущей**) в каких-то точках (рис. 117, б). Занумеруем полученные восемь углов.

Две пары углов называются *внутренними односторонними*: $\angle 3$ и $\angle 6$, а также $\angle 4$ и $\angle 5$.

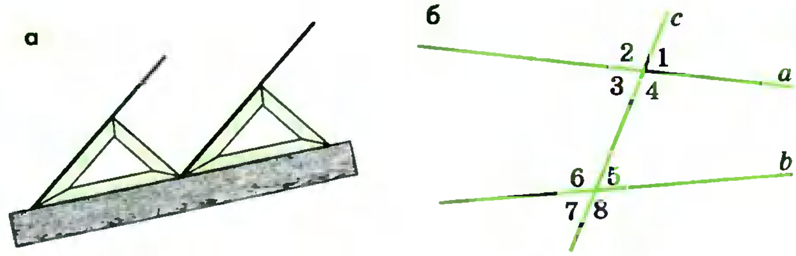


Рис. 117

Две пары углов называются *внутренними накрест лежащими:* $\angle 3$ и $\angle 5$, а также $\angle 4$ и $\angle 6$.

Наконец, четыре пары углов называются *соответственными:* $\angle 1$ и $\angle 5$, $\angle 2$ и $\angle 6$, $\angle 3$ и $\angle 7$, $\angle 4$ и $\angle 8$. Именно о равенстве соответственных углов шла речь выше в практическом способе построения параллельных отрезков (см. рис. 117, а).

13.2 Признаки параллельности. Теперь мы докажем несколько признаков параллельности прямых.

Теорема 7 *(первый признак параллельности).* **Если при пересечении двух прямых третьей прямой окажется, что сумма внутренних односторонних углов равна 180°, то прямые параллельны.**

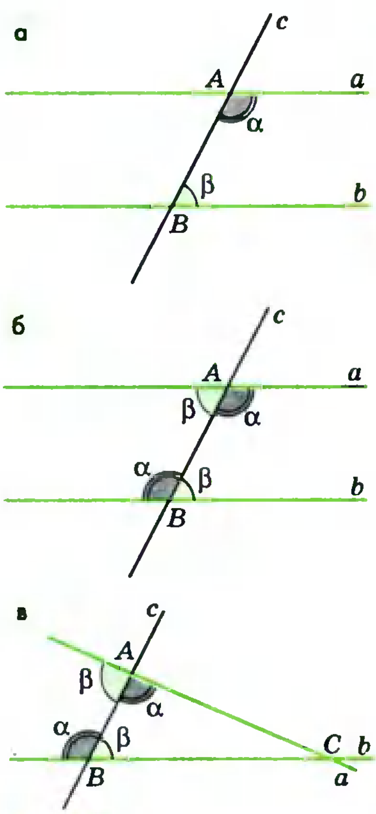


Рис. 118

Дано: прямая c пересекает прямые a и b в точках A и B; $\alpha+\beta=180°$ (рис. 118, а).

Доказать: $a \parallel b$.

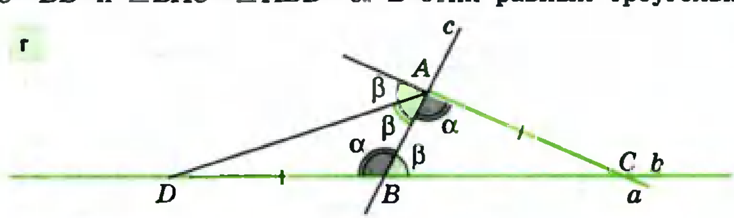
• **Доказательство.** Из условия теоремы следует, что угол, смежный с углом α, равен β, а угол, смежный с углом β, равен α (рис. 118, б).

Возможны два случая:

1) прямые a и b параллельны; 2) прямые a и b непараллельны.

Рассмотрим второй из них, т. е. допустим, что прямые a и b непараллельны. Тогда они пересекаются в некоторой точке C (рис. 118, в). Получится треугольник ABC, у которого углы, прилежащие к стороне AB, равны α и β. На прямой b отложим отрезок BD, равный отрезку AC, и проведем отрезок AD (рис. 118, г).

Тогда треугольники ABC и BAD равны по первому признаку равенства треугольников: сторона AB у них общая, $AC=BD$ и $\angle BAC=\angle ABD=\alpha$. В этих равных треугольни-



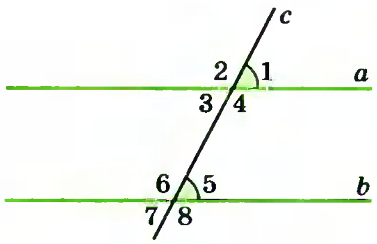


Рис. 119

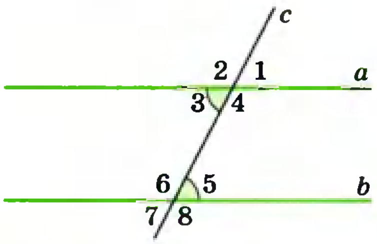


Рис. 120

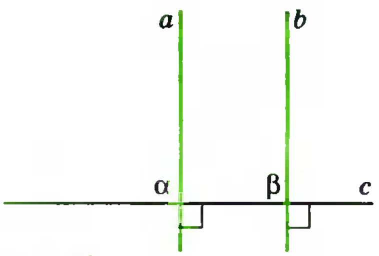


Рис. 121

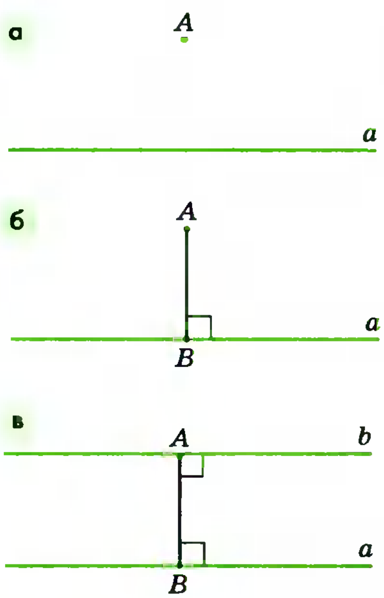


Рис. 122

ках равны соответственные друг другу углы (теорема 1). Поэтому $\angle BAD = \angle ABC = \beta$.

Но тогда от луча AB в одну сторону отложены два угла, равные углу β. Это противоречит утверждению единственности в аксиоме откладывания угла. Итак, предположение, что прямые a и b непараллельны, ведет к противоречию, т. е. второй случай невозможен. Остается первый случай: прямые a и b параллельны.

Из доказанной теоремы можно вывести еще несколько признаков параллельности прямых. Так как они *следуют* из теоремы 7, будем называть их *следствиями* теоремы 7.

Следствие 1 *(второй признак параллельности).* **Если при пересечении двух прямых третьей прямой окажется, что соответственные углы равны, то прямые параллельны (рис. 119).**

● **Доказательство.** Пусть $\angle 1 = \angle 5$. Так как $\angle 1 + \angle 4 = 180°$ и $\angle 1 = \angle 5$, то $\angle 5 + \angle 4 = 180°$. Поэтому выполняется условие теоремы 7. Следовательно, $a \parallel b$.

Следствие 2 *(третий признак параллельности).* **Если при пересечении двух прямых третьей прямой окажется, что внутренние накрест лежащие углы равны, то прямые параллельны (рис. 120).**

● **Доказательство:** Пусть $\angle 3 = \angle 5$. Так как $\angle 3 + \angle 4 = 180°$ и $\angle 3 = \angle 5$, то $\angle 5 + \angle 4 = 180°$. Поэтому выполняются условия теоремы 7. Следовательно, $a \parallel b$.

Следствие 3 *(о параллельности перпендикуляров).* **Две прямые, перпендикулярные третьей прямой, параллельны (рис. 121).**

Это самый простой признак параллельности. Его можно получить разными способами. Мы выведем его из следствия 1.

● Пусть $a \perp c$ и $b \perp c$. Так как $a \perp c$, то $\alpha = 90°$. Так как $b \perp c$, то $\beta = 90°$. Поэтому $\alpha = \beta$. Углы α и β соответственные. Следовательно, $a \parallel b$.

Выведите сами этот признак параллельности из теоремы 7 или следствия 2.

Опираясь на доказанные признаки, мы можем теперь обосновать построение параллельных прямых. Например, если точка A не лежит на прямой a (рис. 122, а), то провести через точку A прямую $b \parallel a$ можно так: опустить перпендикуляр AB на прямую a (рис. 122, б) и затем провести через точку A прямую $b \perp AB$ (рис. 122, в). Тогда $b \parallel a$ согласно следствию 3.

13.3 **Способ доказательства «от противного».** Способ, которым была доказана теорема 7, состоял в следующем.

Сначала мы рассмотрели случай, при котором заключение теоремы неверно. Такое предположение привело нас к противоречию с истинным утверждением (аксиомой или теоремой). Поэтому на самом деле заключение теоремы верно.

Такой способ доказательства называется способом «от противного». Он был известен еще в Древней Греции. Мы будем применять его довольно часто.

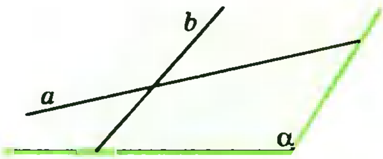


Рис. 123

13.4 **Взаимное расположение прямых и плоскостей.** Напомним, что две прямые, которые имеют общую точку, называются **пересекающимися.** Любые две пересекающиеся прямые лежат в одной плоскости, и такая плоскость лишь одна *(рис. 123)*.

Для двух прямых, которые не имеют общей точки, есть две возможности:

1) они лежат в одной плоскости *(рис. 124, а)*, т. е. есть такая плоскость, в которой они лежат (и такая плоскость лишь одна);

2) они не лежат в одной плоскости, т. е. нет такой плоскости, в которой они лежат *(рис. 124, б)*.

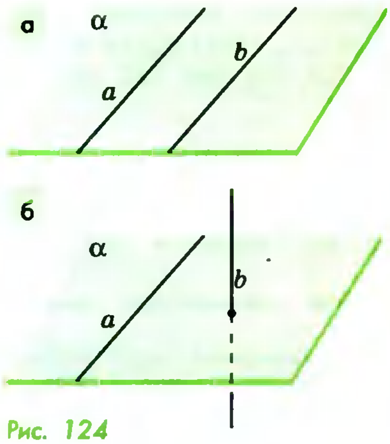


Рис. 124

В первом случае, как уже сказано в п. 13.1, прямые называются **параллельными,** во втором — **скрещивающимися.**

Итак, **две прямые, которые не имеют общей точки и не лежат в одной плоскости, называются *скрещивающимися*.** Отрезки, лежащие на скрещивающихся прямых, также называются скрещивающимися.

Все три случая взаимного расположения двух прямых в пространстве можно увидеть на парах прямых, содержащих ребра куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ *(рис. 125, а)*: прямые AB и BC пересекаются, AB и A_1B_1 параллельны, AB и CC_1 скрещиваются.

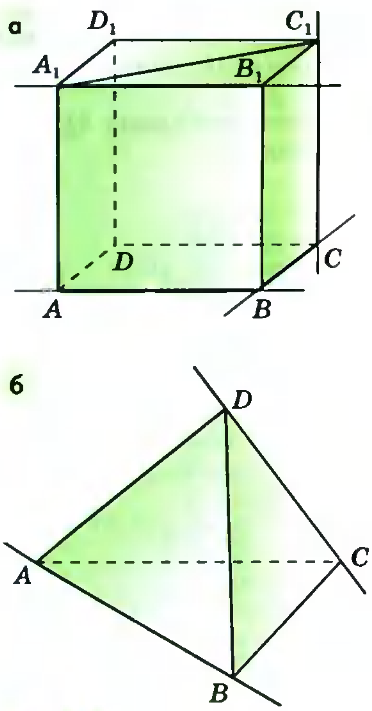


Рис. 125

Скрещиваются и две прямые, проходящие через две пары вершин тетраэдра $ABCD$: AB и CD, AC и BD, AD и BC *(рис. 125, б)*.

Если две плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой и называются **пересекающимися.** Например, плоскости граней $ABCD$ и BAA_1B_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересекаются по прямой AB.

Две плоскости, которые не имеют общей точки, называются **параллельными.** Например, плоскости граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ параллельны.

Для взаимного расположения прямой a и плоскости α имеются три возможности:

1) прямая a **лежит в плоскости** α, т. е. все точки прямой a являются точками плоскости α *(рис. 126, а)*;

2) прямая a имеет с плоскостью α лишь одну общую точку A *(рис. 126, б)*, в этом случае говорят, что прямая a **пересекает плоскость** α;

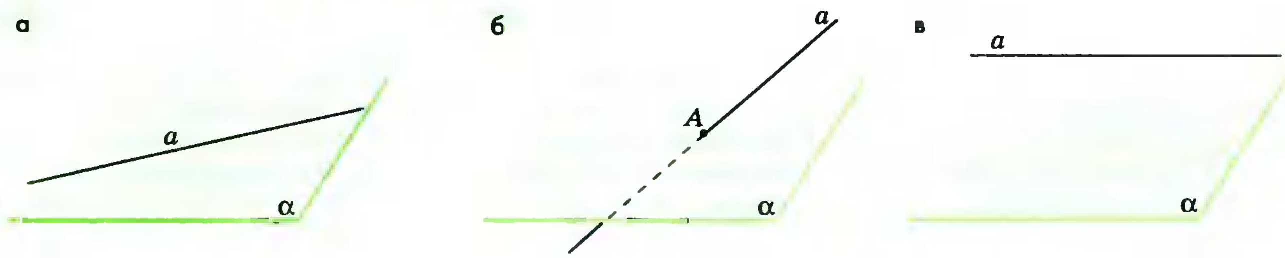


Рис. 126

3) прямая a и плоскость α не имеют общих точек (*рис. 126, в*), прямая и плоскость, не имеющие общих точек, называются **параллельными.** Ясно, что прямая, лежащая в одной из двух параллельных плоскостей, параллельна другой плоскости. Например, прямая A_1C_1 параллельна плоскости грани $ABCD$ куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. *рис. 125, а*).

1. Как могут быть расположены две прямые на плоскости?
2. Перечислите известные вам признаки параллельности.
3. Попробуйте придумать еще какие-нибудь признаки параллельности.
4. Какие возможны случаи взаимного расположения двух прямых в пространстве?
5. Как могут быть расположены прямая и плоскость?

Задачи к §

13.1. Докажите, что две прямые параллельны, если при пересечении их с третьей прямой: а) внешние односторонние углы дают в сумме 180° (например, $\angle 1+\angle 8=180°$ на *рисунке 120*; б) внешние накрест лежащие углы равны (например, на *рисунке 120* $\angle 1=\angle 7$).

13.1 **13.2.** На *рисунке 127* установите, какие углы являются: а) соответственными; б) внутренними накрест лежащими; в) внутренними односторонними.

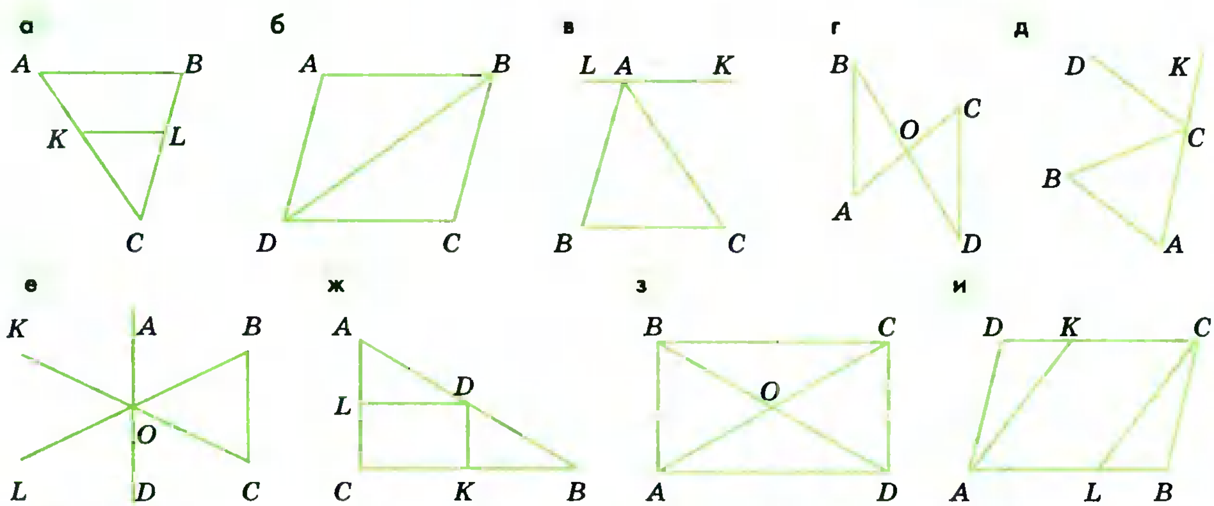


Рис. 127

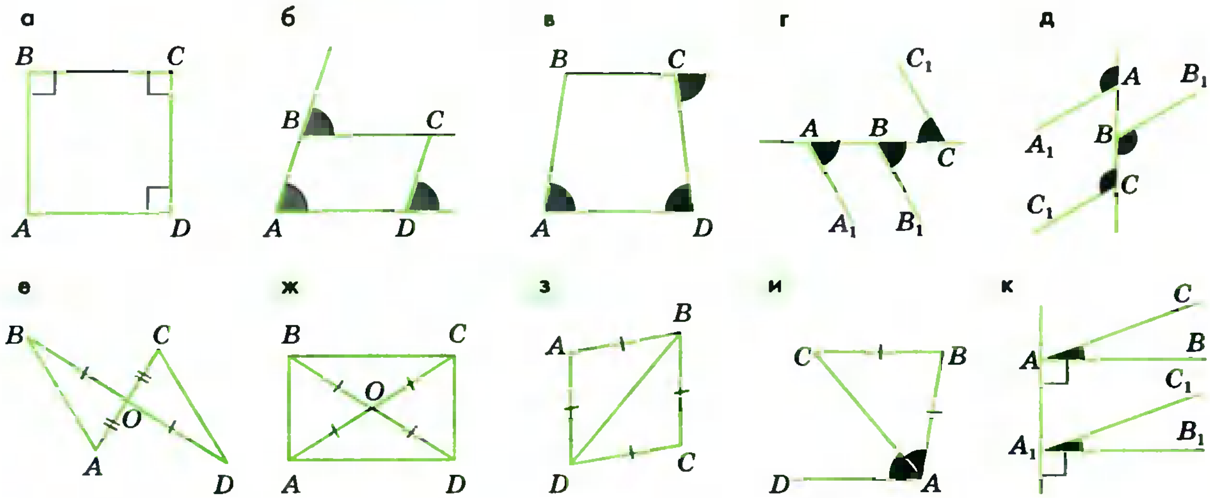


Рис. 128

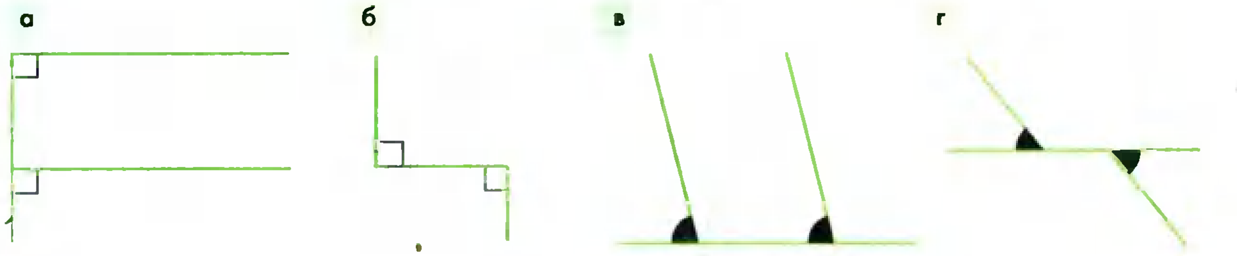


Рис. 129

13.3. Отметьте какой-либо угол на *рисунке 127*. Есть ли для него: а) соответственный угол; б) накрест лежащий внутренний угол; в) внутренний односторонний угол?

13.2 **13.4.** Укажите параллельные прямые на *рисунке 128*.

13.5. Докажите, что параллельны биссектрисы углов, отмеченных на *рисунке 129*. Будут ли параллельны биссектрисы углов, смежных с отмеченными на рисунке?

13.6. Докажите, что противоположные стороны четырехугольника на *рисунке 130* параллельны.

13.7. Объясните, почему движутся по параллельным прямым: а) корабли, плывущие одним курсом; б) туристы, идущие по одному азимуту.

13.8. Объясните, почему три точки окружности не лежат на одной прямой.

13.4 **13.9.** Нарисуйте куб. Укажите пары параллельных и скрещивающихся его ребер.

13.10. Нарисуйте куб. Укажите пары пересекающихся, параллельных и скрещивающихся диагоналей его граней.

13.11. Нарисуйте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Сколько плоскостей граней куба пересекает прямая: а) AC; б) AC_1?

13.12. Может ли прямая быть параллельна двум пересекающимся плоскостям?

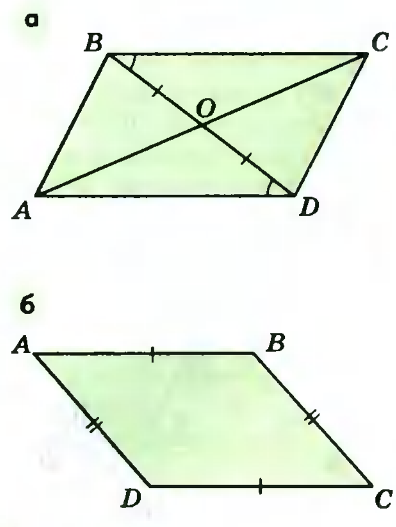


Рис. 130

§ 14. Аксиома параллельности

Рис. 131

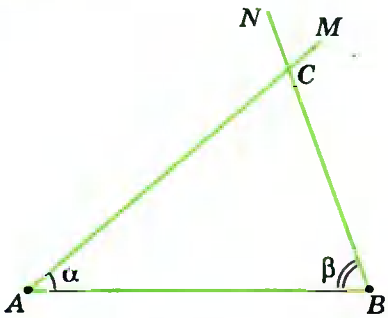


Рис. 132

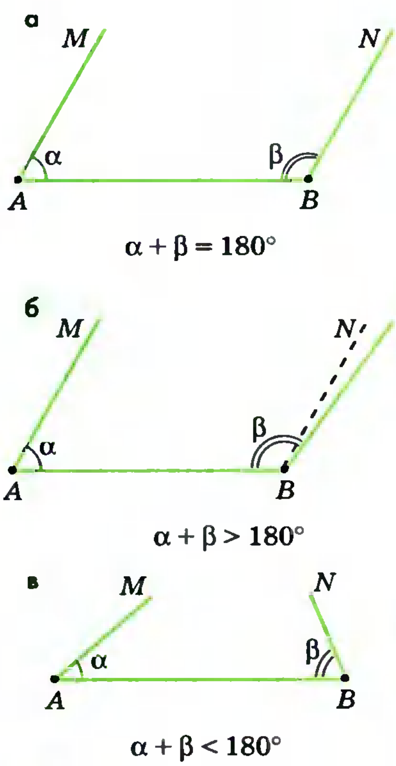


Рис. 133

14.1 **Построение треугольника по стороне и двум углам.** В п. 10.2 мы решили задачу о построении треугольника по двум сторонам и углу между ними. Эта задача всегда имеет решение, и притом единственное (по первому признаку равенства треугольников).

Сейчас мы рассмотрим задачу, соответствующую второму признаку равенства треугольников.

Задача. Построить треугольник по стороне и двум прилежащим к ней углам.

Дано: отрезок AB, углы α и β *(рис. 131)*.

Построить. $\triangle ABC$, у которого $\angle A=\alpha$ и $\angle B=\beta$.

Построение. Отложим по одну сторону от отрезка AB угол $BAM=\alpha$ и угол $ABN=\beta$. Если их стороны AM и BN пересекутся в некоторой точке C, то треугольник ABC будет искомым *(рис. 132)*.

Согласно второму признаку равенства треугольников решение может быть лишь одно. Это означает, что равны все треугольники, имеющие сторону, равную AB, и углы, прилежащие к этой стороне, равные α и β.

Исследуем всегда ли задача имеет решение. Не всегда. Если $\alpha+\beta=180°$, то по первому признаку параллельности $AM \parallel BN$. Поэтому лучи AM и BN не пересекутся и треугольник не получится *(рис. 133, а)*. Решения нет.

Тем более лучи AM и BN не пересекутся, если $\alpha+\beta>180°$ *(рис. 133, б)*. В этом случае тоже решения нет.

Остается случай, когда $\alpha+\beta<180°$ *(рис. 133, в)*. Можно ли доказать, что в этом случае лучи AM и BN пересекутся? Оказывается, что без дополнительных аксиом это доказать нельзя! Это поняли еще в Древней Греции, и великий геометр Евклид ввел в своем знаменитом сочинении «Начала» такую аксиому:

«Требуется, чтобы всякий раз, когда прямая при пересечении с двумя другими прямыми образует с ними внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых, эти прямые пересекались с той стороны, с которой эта сумма меньше двух прямых».

В ней фактически и говорится о том, что можно построить треугольник ABC, если $\alpha+\beta<180°$.

14.2 **Аксиома параллельности.** В современных курсах геометрии пятый постулат Евклида заменяют такой аксиомой:

Аксиома параллельности. **Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит единственная прямая, параллельная данной прямой** *(рис. 134)*.

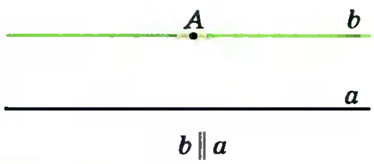


Рис. 134

Эта аксиома говорит о том, что через точку A, не лежащую на прямой a, нельзя провести две прямые, параллельные прямой a.

Сделаем два простейших вывода из этой аксиомы.

1. Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны друг другу (рис. 135, а).

Действительно, пусть прямые a и b параллельны прямой c. Докажем, что $a \parallel b$, способом «от противного». Допустим, что a и b пересекаются в точке A (рис. 135, б). Тогда через A проходят две прямые, параллельные прямой c. А это противоречит аксиоме параллельности. Следовательно, прямые a и b не пересекаются, т. е. $a \parallel b$.

Способом «от противного» докажите сами следующее утверждение:

2. Если прямая пересекает одну из двух параллельных прямых, то она пересекает и другую из них (рис. 136).

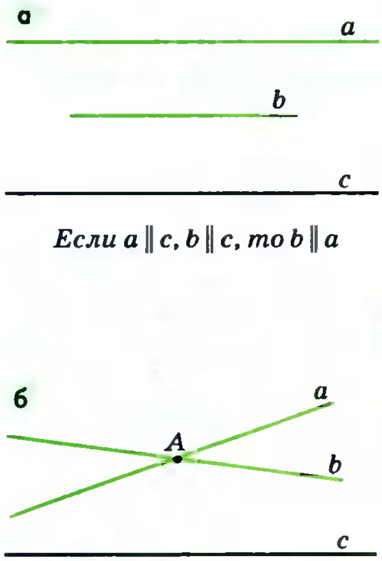


Рис. 135

14.3 Углы при параллельных прямых и секущей.

Сейчас мы докажем свойства параллельных прямых, обратные признакам параллельности прямых.

Теорема 8 *(об односторонних углах при параллельных и секущей).* **Если две параллельные прямые пересекаются третьей прямой, то сумма внутренних односторонних углов равна 180°.**

Дано: $a \parallel b$, c пересекает a и b, α и β — внутренние односторонние углы (рис. 137, а).

Доказать: $\alpha+\beta=180°$.

Доказательство. Пусть прямая c пересекает прямую a в точке A, а прямую b в точке B. Снова применим способ «от противного». Допустим, что $\alpha+\beta \neq 180°$. Отложим от луча AB угол BAM, равный $180°-\beta$ с той стороны, где лежит угол α (рис. 137, б). Так как $\alpha \neq 180°-\beta$, то прямая AM не совпадает с прямой a. По первому признаку параллельности $AM \parallel b$. Но тогда через точку A проходят две прямые, параллельные прямой b. Получили противоречие с ак-

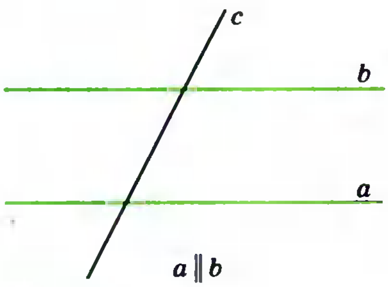


Рис. 136

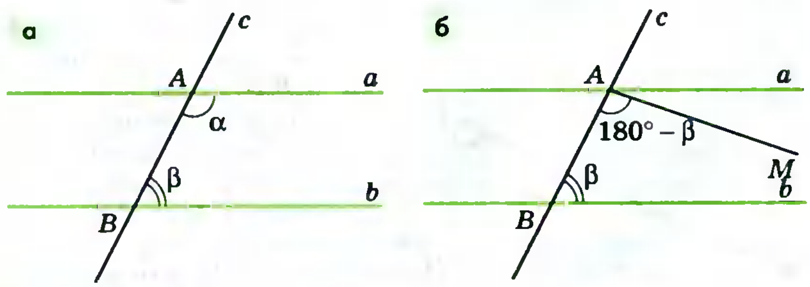


Рис. 137

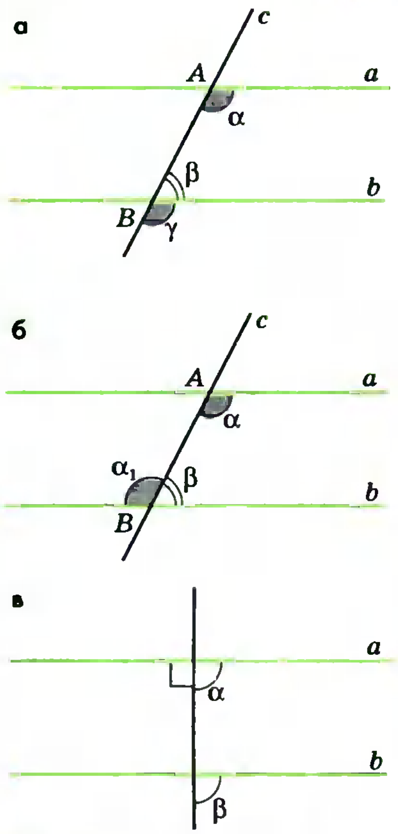


Рис. 138

сиомой параллельности. Оно возникло из-за предположения, что $\alpha+\beta\neq180^\circ$. Поэтому такого быть не может, т. е. $\alpha+\beta=180^\circ$.

Следствие 1 *(о соответственных углах).* **Если две праллельные прямые пересекаются третьей прямой, то образованные ими соответственные углы равны** *(рис. 138, а).*

• **Доказательство.** Так как $\alpha+\beta=180^\circ$ и $\gamma+\beta=180^\circ$, то $\alpha=180^\circ-\beta$ и $\gamma=180^\circ-\beta$. Поэтому $\alpha=\gamma$. ○

Следствие 2 *(о накрест лежащих углах).* **Если две параллельные прямые пересекаются третьей прямой, то образованные ими внутренние накрест лежащие углы равны** *(рис. 138, б).*

• **Доказательство.** Так как $\alpha+\beta=180^\circ$ и $\alpha_1+\beta=180^\circ$, то $\alpha=180^\circ-\beta$ и $\alpha_1=180^\circ-\beta$. Поэтому $\alpha=\alpha_1$. ○

Следствие 3 *(о параллели к перпендикуляру).* **Если две прямые параллельны и одна из них перпендикулярна третьей прямой, то и другая перпендикулярна третьей прямой** *(рис. 138, в).*

• **Доказательство.** Углы α и β равны как соответственные. Поэтому $\beta=90^\circ$.

Замечание. Из теоремы 8 вытекает, что пятый постулат Евклида следует из аксиомы параллельности. Поэтому задача о построении треугольника по стороне и прилежащим к ней двум углам, когда сумма углов меньше 180°, имеет решение.

14.4 Построение прямоугольника.

Вы знаете, что **прямоугольник** — это четырехугольник, все углы которого прямые *(рис. 139, а).* Из этого определения вытекают такие два свойства прямоугольника:

1. Противоположные стороны прямоугольника параллельны (по следствию о параллельности перпендикуляров, п. 13.2).
2. Противоположные стороны прямоугольника равны.

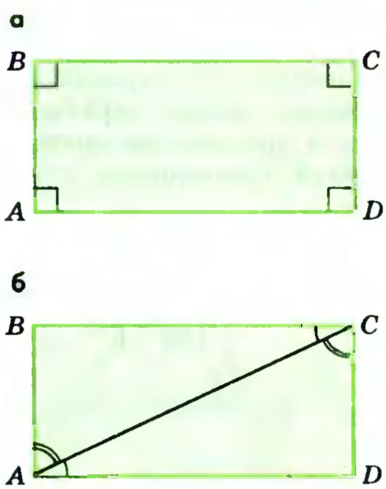


Рис. 139

• **Доказательство.** В прямоугольнике $ABCD$ проведем диагональ AC *(рис. 139, б).* Тогда $\angle CAD=\angle BCA$ и $\angle BAC=\angle DCA$ (как накрест лежащие). $\triangle ACD=\triangle ACB$ (по второму признаку). Поэтому $AB=DC$ и $AD=BC$. ○

Как построить прямоугольник, зная его стороны a и b? Один из способов построения таков. Построим прямой угол A *(рис. 140, а).* На его сторонах отложим отрезки $AD=a$ и $AB=b$. Через точки B и D проведем прямые $p\perp AB$ и $q\perp AD$. Так как $p\perp AB$ и $AD\perp AB$, то $p\parallel AD$. А поскольку прямая q пересекает прямую AD, то она пересекает и

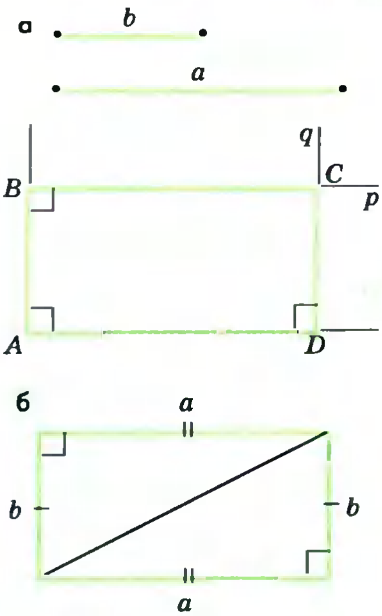


Рис. 140

параллельную ей прямую p в некоторой точке C. Полученный четырехугольник $ABCD$ — прямоугольник. Углы A, B, D в нем прямые по построению, а угол C прямой по следствию о параллели к перпендикуляру (п. 14.3).

Есть и другие способы построения прямоугольников. Например, почему получится прямоугольник, если сложить два равных прямоугольных треугольника, как на *рисунке 140, б*? Постарайтесь это обосновать.

Полосы Слово «параллельная» в переводе с греческого означает «идущая рядом». Более того, можно сказать, что параллельные прямые проходят на постоянном расстоянии друг от друга. Поясним это.

Пусть a и b — параллельные прямые (*рис. 141, а*). Возьмем на прямой a две точки A и B и опустим из них перпендикуляры AD и BC на прямую b. Получим прямоугольник $ABCD$. Действительно, $AD \perp a$ и $BC \perp a$ (по следствию о параллели к перпендикуляру). А в прямоугольнике противоположные стороны равны. Поэтому $AD = CB$.

Отрезок AD (и BC) перпендикулярен прямым a и b, а потому называется **общим перпендикуляром прямых** a и b.

Итак, мы доказали два утверждения:

---

1. Из каждой точки одной из параллельных прямых идет до другой из них общий перпендикуляр.
2. Все общие перпендикуляры двух параллельных прямых равны друг другу и параллельны.

Эти два утверждения и означают, что параллельные прямые проходят на постоянном расстоянии друг от друга.

Часть плоскости между параллельными прямыми назовем **полосой**. Можно сказать, что параллельные прямые ограничивают полосу постоянной ширины. **Ширина полосы** — это длина общего перпендикуляра параллельных прямых, ограничивающих полосу (*рис. 141, б*).

Наглядную картину высказанных утверждений дают уходящие вдаль рельсы прямой железной дороги (*рис. 141, в*). Их общие перпендикуляры представлены, хотя и несколько грубо, шпалами. Параллельность рельсов проверяют именно по постоянству расстояния, перемещая вдоль них соответствующий шаблон.

Параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей. В курсе стереометрии будут доказаны следующие предложения, которые можно использовать при решении стереометрических задач:

1. В пространстве через каждую точку, не лежащую на данной прямой, проходит параллельная ей прямая и притом только одна.
2. В пространстве через каждую точку, не лежащую на данной плоскости, проходит параллельная ей плоскость и притом только одна (*рис. 142, а*).

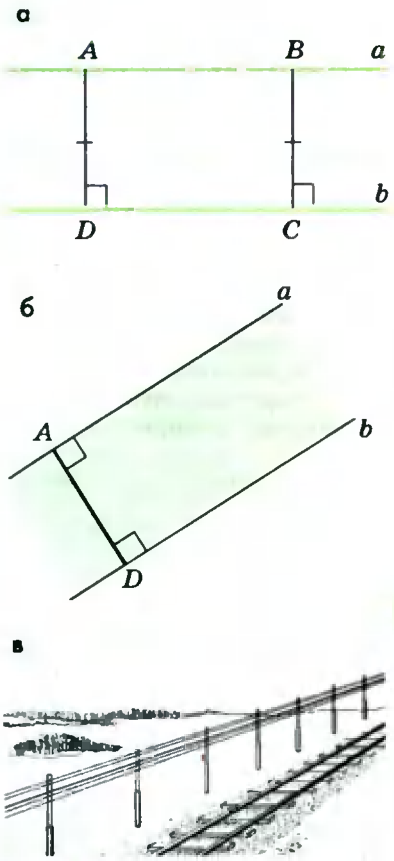
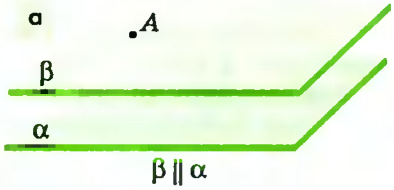
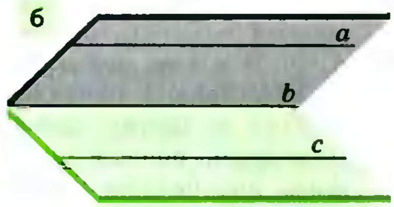
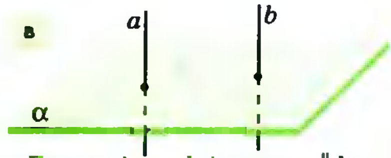


Рис. 141

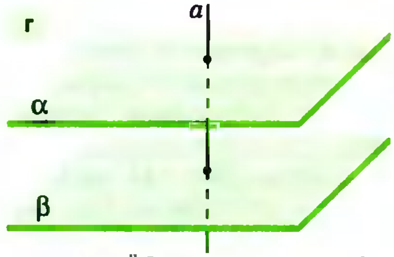




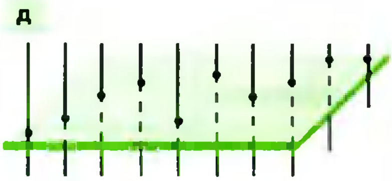
Если $a \parallel b$, $c \parallel b$, *то* $a \parallel c$



Если $a \perp \alpha$ *и* $b \perp \alpha$, *то* $a \parallel b$



Если $\alpha \parallel \beta$ *и* $a \perp \alpha$, *то* $a \perp \beta$



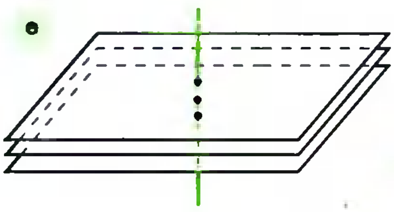


Рис. 142

3. В пространстве две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны (*рис. 142, б*).

4. Две прямые, перпендикулярные одной плоскости, параллельны (*рис. 142, в*).

5. Две плоскости, перпендикулярные одной прямой, параллельны (*рис. 142, г*).

6. В пространстве через каждую точку проходит прямая, перпендикулярная данной плоскости, и притом только одна (*рис. 142, д*).

7. В пространстве через каждую точку проходит плоскость, перпендикулярная данной прямой, и притом только одна (*рис. 142, е*).

8. Плоскость, перпендикулярная одной из двух параллельных прямых, перпендикулярна и другой из них. Сделайте рисунок.

9. Прямая, перпендикулярная одной из двух параллельных плоскостей, перпендикулярна и другой из них. Сделайте рисунок.

Обратите внимание, что на рисунках пространственных фигур параллельные прямые изображаются как параллельные прямые, а равные и параллельные отрезки — равными и параллельными отрезками (например, при изображении куба).

1. В чем заключается аксиома параллельности?
2. Какие свойства параллельных прямых вы узнали?
3. Какими свойствами обладает прямоугольник?
4. Проиллюстрируйте теоремы о параллельности и перпендикулярности прямых и плоскостей, осмотрев комнату, в которой вы сейчас находитесь.

Задачи к § 14

14.1. Нарисуйте две параллельные прямые a и b. Нарисуйте точку, не лежащую на этих прямых. Нарисуйте перпендикуляры из этой точки на a и b. Докажите, что эти перпендикуляры лежат на одной прямой.

14.2. Нарисуйте две параллельные прямые a и b. Нарисуйте затем прямую $c \perp a$ и прямую $d \perp b$. Пусть прямые c и d различны. Докажите, что $c \parallel d$. Перескажите эту задачу как признак параллельности двух прямых.

14.3. Нарисуйте угол AOB. Нарисуйте точку O_1, луч $O_1A_1 \parallel OA$ и луч $O_1B_1 \parallel OB$. Докажите, что углы $A_1O_1B_1$ и AOB либо равны, либо дают в сумме 180°. Выясните, при каком дополнительном условии они равны, а при каком дают в сумме 180°.

14.4. Нарисуйте две параллельные прямые. Нарисуйте другие две параллельные прямые, пересекающие данные. Докажите, что отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными прямыми, равны.

14.4 **14.5.** Вычислите величины остальных углов на **рисунке 143**, если известно, что прямые a и b параллельны.

14.6. Нарисуйте две параллельные прямые a и b. На прямой a отметьте две точки A и B. На прямой b нарисуйте отрезок A_1B_1, равный AB. Нарисуйте отрезки AB_1 и A_1B. Пусть они пересекаются в точке O. Докажите, что: а) $AO=OB_1$ и $A_1O=OB$; б) $AA_1=BB_1$; в) $AA_1 \parallel BB_1$.

14.7. Нарисуйте две параллельные прямые a и b. На прямой a отметьте две точки A_1 и A_2. Проведите через A_1 и A_2 две прямые, образующие с прямой a равные углы. Докажите, что отрезки этих прямых, заключенных между a и b, равны. (Здесь возможны два случая.)

14.7 **14.8.** Из точек A и C плоскости α провели в одну сторону от нее два равных перпендикуляра AB и CD к плоскости α. Докажите, что: а) отрезки BC и AD пересекаются в некоторой точке O; б) $BC=AD$; в) четырехугольник $ABDC$ — прямоугольник; г) $OA=OB=OC=OD$.

14.9. Из точек A и C плоскости α провели в разные стороны от нее два равных перпендикуляра AB и CD к плоскости α. Докажите, что: а) отрезки AC и BD пересекаются в середине отрезка AC — точке O; б) $BO=OD$; в) $\triangle ABD=\triangle BCD$.

14.10. Почему ребра AA_1 и CC_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежат в одной плоскости?

14.11. Докажите, что все диагонали прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равны, т. е. $AC_1=A_1C=BD_1=B_1D$.

14.12. Через середину ребра AB куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ провели плоскость α, перпендикулярную ребру AB. На какие многогранники плоскость α разобьет куб? Сделайте рисунок.

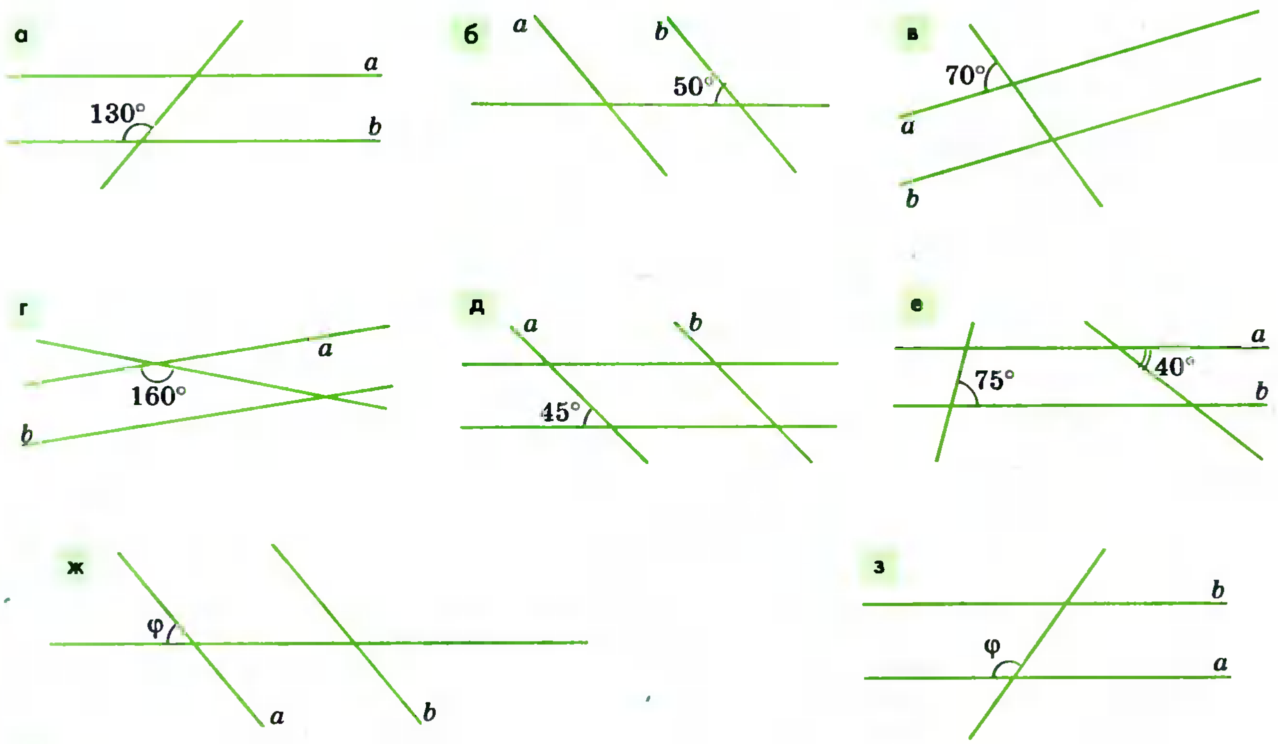


Рис. 143

§ 15 Сумма углов треугольника

15.1 **Теорема о сумме углов треугольника.** Свойства параллельных прямых помогут нам доказать важнейшую теорему:

Теорема 9. Сумма углов треугольника равна 180°.

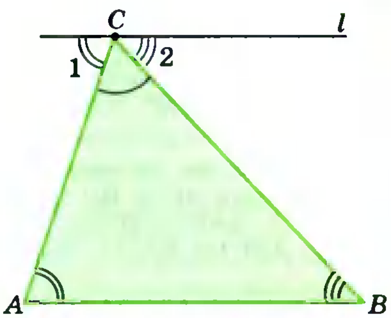


Рис. 144

Дано: $\triangle ABC$.

Доказать: $\angle A+\angle B+\angle C=180°$.

• **Доказательство.** Проведем через вершину C прямую l, параллельную стороне AB (*рис. 144*). Тогда с той стороны от прямой l, где лежит треугольник ABC, образуются три угла с вершиной C: $\angle C$ треугольника ABC, $\angle 1$ и $\angle 2$. Эти три угла в сумме дают развернутый угол. Поэтому

$$\angle 1+\angle 2+\angle C=180°. \qquad (1)$$

Но $\angle 1=\angle A$ (как внутренние накрест лежащие при параллельных прямых l и AB и секущей AC). Аналогично $\angle 2=\angle B$ (при тех же параллельных и секущей BC). Заменяя в равенстве (1) $\angle 1$ углом A, а $\angle 2$ углом B, получаем, что $\angle A+\angle B+\angle C=180°$.

15.2 **Следствия из теоремы о сумме углов треугольника.**

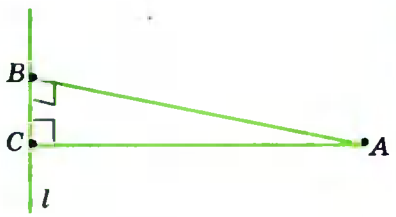


Рис. 145

Следствие 1. **В треугольнике может быть только один неострый угол, т. е. прямой или тупой.**

• **Доказательство.** Пусть в треугольнике один из углов не меньше 90°. Тогда сумма двух остальных углов не больше 90°. Поэтому каждый из них меньше 90°, т. е. оба эти угла острые.

Следствие 2 (*о единственности перпендикуляра*). **Из данной точки на данную прямую можно опустить лишь один перпендикуляр.**

• **Доказательство.** Пусть из точки A на прямую l можно опустить два перпендикуляра AB и AC (*рис. 145*). Тогда получится треугольник ABC с двумя прямыми углами. А это невозможно в силу следствия 1. Поэтому перпендикуляр лишь один.

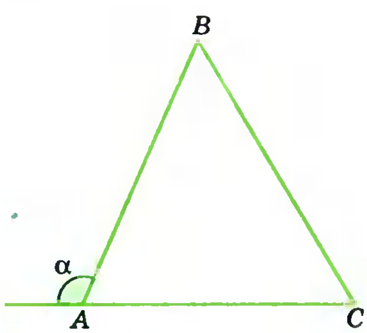


Рис. 146

Определение. **Внешним углом** треугольника называется угол, смежный с углом треугольника (*рис. 146*).

Следствие 3 (*о внешнем угле треугольника*). **Внешний угол треугольника равен сумме двух углов треугольника, с ним не смежных.**

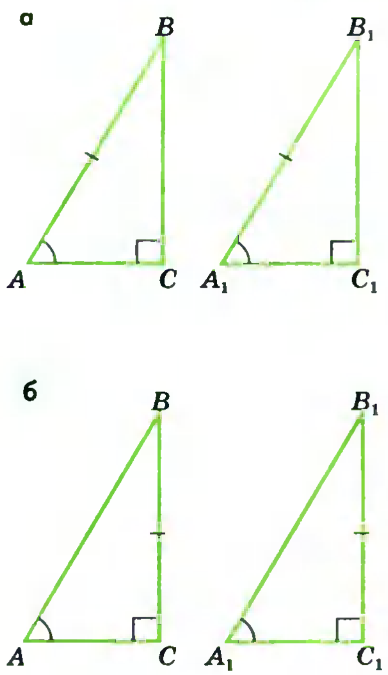


Рис. 147

● **Доказательство.** Пусть α — внешний угол треугольника ABC при вершине A (см. *рис. 146*). Тогда $\angle A+\alpha=180°$. Поэтому $\alpha=180°-\angle A$. Но $\angle A+\angle B+\angle C=180°$. Поэтому $\angle B+\angle C=180°-\angle A$.

Следовательно, $\alpha=\angle B+\angle C$.

Из этого следствия вытекает, что **внешний угол треугольника больше любого угла треугольника, с ним не смежного.**

Следствие 4. **Сумма острых углов прямоугольного треугольника равна 90°.**

● **Доказательство.** Прямой угол в прямоугольном треугольнике равен 90°. Поэтому сумма двух его острых углов равна $180°-90°=90°$. ○

Таким образом, **зная один из острых углов прямоугольного треугольника, можно найти другой его острый угол.**

15.3 Признаки равенства прямоугольных треугольников.

Теперь можно получить еще два признака равенства прямоугольных треугольников (*рис. 147*).

Признак *равенства по гипотенузе и острому углу.* **Если гипотенуза и острый угол одного прямоугольного треугольника равны гипотенузе и острому углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.**

Признак *равенства по катету и противолежащему углу.* **Если катет и противолежащий угол одного прямоугольного треугольника равны катету и противолежащему углу другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны.**

Оба эти признака вытекают из следствия 4 и второго признака равенства треугольников. Докажите их сами.

1. Чему равна сумма углов треугольника?
2. Какие свойства треугольника следуют из того, что сумма его углов равна 180°?
3. Чему равна сумма острых углов прямоугольного треугольника?
4. Какие признаки равенства прямоугольных треугольников вы узнали из этого параграфа?

Задачи к § 15

15.1. Докажите, что каждый угол равностороннего треугольника равен 60°.
15.2. Докажите, что сумма углов любого четырехугольника равна 360°.
15.3. Нарисуйте прямоугольный треугольник, а в нем высоту, опущенную на гипотенузу. Докажите, что исходный треугольник и два полученных треугольника имеют соответственно равные углы.

15.4. а) Нарисуйте равносторонний треугольник, а в нем медиану. Вычислите углы двух полученных треугольников.

б) Нарисуйте прямоугольный треугольник, у которого один из острых углов равен 30°. Докажите, что катет, противолежащий этому углу, равен половине гипотенузы.

в) Пусть в прямоугольном треугольнике один из катетов равен половине гипотенузы. Докажите, что он лежит против угла, равного 30°.

15.1 **15.5.** Пусть α, β, γ — величины углов треугольника. Запишите формулу, связывающую эти величины. Выразите из нее величину каждого из углов.

а) Пусть угол β на 10° больше угла α. Запишите зависимость между углом γ и углом α; углом γ и углом β. Как называется такая зависимость?

б) Пусть угол γ в 2 раза больше угла β. Выразите угол α через угол β; угол β через угол α.

в) Пусть угол α в 2 раза меньше угла γ. Выразите угол β через угол γ; угол β через угол α.

Решение. Рассмотрим решение задачи а).

По условию $\beta=\alpha+10°$. Подставим это значение для β в равенство $\alpha+\beta+\gamma=180°$. Получим $\alpha+(\alpha+10°)+\gamma=180°$. Раскроем скобки и приведем подобные: $2\alpha+10°+\gamma=180°$. Отсюда $\gamma=-2\alpha+170°$. Получили формулу для вычисления γ, если известно α. Иначе говоря, получили зависимость между γ и α. Такая зависимость является линейной функцией.

Найдем зависимость между γ и β. По условию $\beta=\alpha+10°$, откуда $\alpha=\beta-10°$. Подставим это в формулу $\gamma=-2\alpha+170°$. Получаем $\gamma=-2(\beta-10°)+170°$, т. е. $\gamma=-2\beta+190°$. И эта зависимость является линейной функцией.

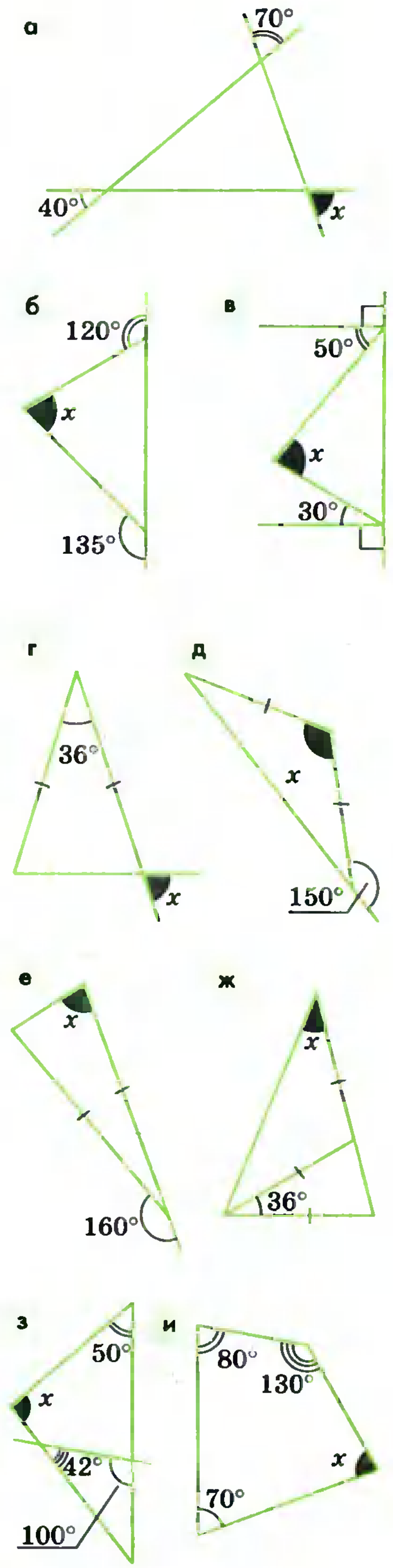


Рис. 148

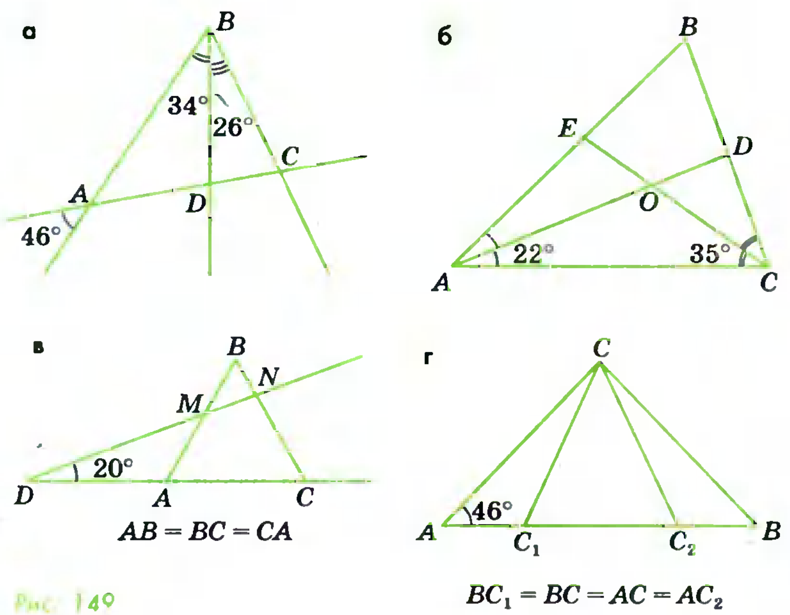


Рис. 149

15.6. Установите вид треугольника ABC, если: а) $\angle B = 2\angle A$; $\angle C = 3\angle A$; б) $\angle B = 2\angle C$, $\angle A = 6\angle C$; в) $\angle A:3 = \angle B:4 = \angle C:5$; г) $\angle A$ на 45° больше $\angle B$, а $\angle C$ на 45° больше $\angle A$.

15.7. Пусть α — угол при основании равнобедренного треугольника, а β — угол при его вершине. Запишите формулу, связывающую эти величины.
а) Выразите из полученной формулы угол при вершине. Как называется такая зависимость?
б) Выразите из формулы угол при основании. Какая это зависимость?
в) Пусть угол при основании стал увеличиваться. Что будет происходить с углом при вершине? Сделайте рисунок, поясняющий ваш вывод.
г) Пусть угол при вершине стал увеличиваться. Что будет происходить с углом при основании? Сделайте рисунок, поясняющий ваш вывод.

15.8. Вычислите углы равнобедренного треугольника, в котором: а) угол при вершине на 30° больше угла при основании; б) угол при вершине на 60° меньше угла при основании; в) угол при вершине в 2 раза больше угла при основании; г) угол при вершине в 4 раза меньше угла при основании.

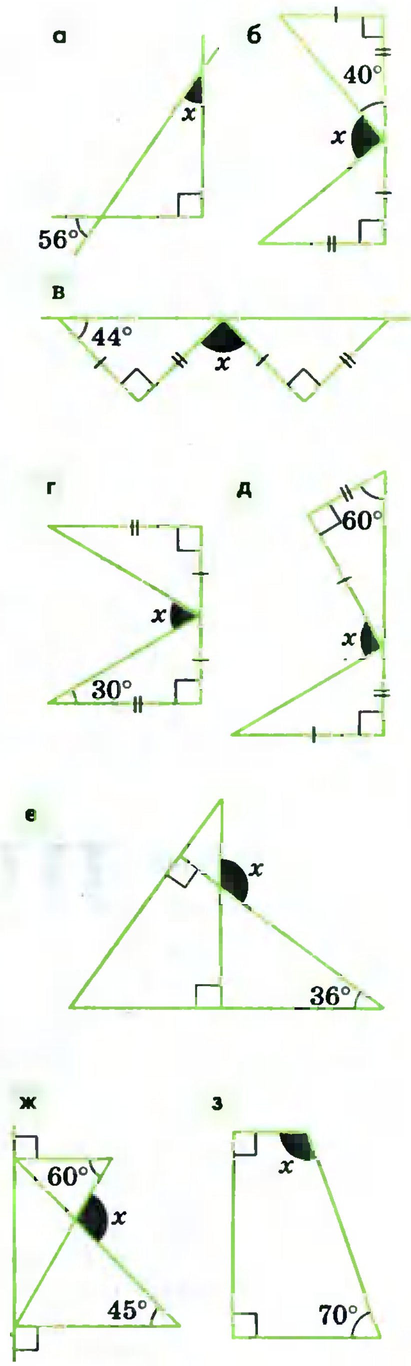
15.9. Вычислите неизвестный угол x на *рисунке 148*.

15.10. Как вычислить неизвестные углы на *рисунке 149*? (Дугами отмечены известные углы.)

15.11. а) Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 60°. Докажите, что этот треугольник равносторонний.
б) Вычислите острый угол равнобедренного прямоугольного треугольника.
в) Угол при основании равнобедренного треугольника равен 45°. Докажите, что этот треугольник прямоугольный.

15.12. Чему равен угол между биссектрисами двух углов треугольника, если третий его угол равен:
а) 20°; б) 160°; в) φ?
Как решить обратную задачу, т. е., зная угол между биссектрисами двух углов треугольника, найти его третий угол?

15.13. Ясно, что в тупоугольном треугольнике есть два острых угла.
а) Как вы это объясните?
б) Сформулируйте обратное утверждение.
в) Верно ли оно?



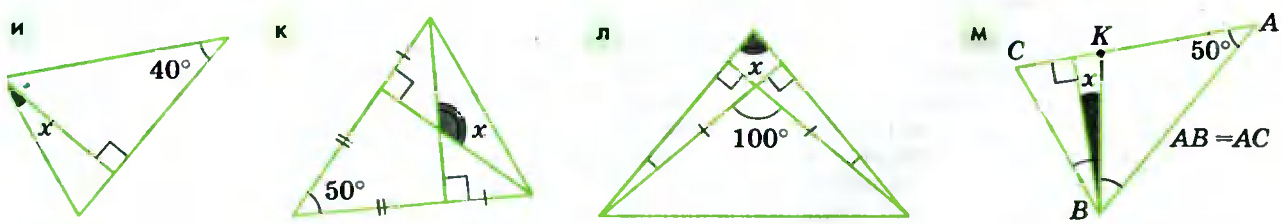


Рис. 150

15.14. Докажите, что наибольший угол треугольника не меньше 60°, а наименьший угол треугольника не больше 60°.

15.15. Какого вида четвертый угол четырехугольника, если три его угла: а) прямые; б) острые; в) тупые?

15.16. Сколько в четырехугольнике может быть: а) прямых углов; б) острых углов; в) тупых углов?

15.17. а) В четырехугольнике (не прямоугольнике) два прямых угла. Докажите, что среди других углов один острый, а другой тупой.

б) В четырехугольнике (не прямоугольнике) один прямой угол. Докажите, что среди остальных его углов есть хоть один тупой и хоть один острый.

15.18. Может ли в четырехугольнике один из углов равняться сумме остальных?

15.3 15.19. Пусть α и β — острые углы прямоугольного треугольника. Запишите формулу, связывающую эти величины.

а) Выразите из нее каждый из углов. Как называется такая зависимость величин?

б) Пусть один из острых углов увеличивается. Что происходит с другим из них? Сделайте рисунок.

15.20. Вычислите острые углы прямоугольного треугольника, если известно, что: а) треугольник равнобедренный; б) один из них в 2 раза больше другого; в) один из них на 60° больше другого; г) их величины относятся как 2:3.

15.21. Вычислите неизвестный угол x на *рисунке 150*.

15.22. Нарисуйте угол. На его сторонах от вершины отложите два равных отрезка. Нарисуйте биссектрису угла. Из концов отрезков проведите перпендикуляры к биссектрисе. Докажите, что они попадут в одну точку.

15.23. Докажите, что высоты равнобедренного треугольника, проведенные из вершин основания, равны.

Задачи к III главе

III 1. На сколько частей могут разделить плоскость: а) три прямые; б) четыре прямые?

III 2. Нарисуйте равнобедренный треугольник. а) Проведите прямую, пересекающую его боковые стороны и параллельную основанию. Докажите, что она отсекла от данного равнобедренный треугольник. б) Продолжите его боковые стороны за вершину. Проведите прямую, пересекающую стороны полученного угла и параллельную основанию. Докажите, что она отсекла от этого угла равнобедренный треугольник.

III 3. Докажите, что равнобедренные треугольники равны, если у них соответственно равны: а) боковые стороны и углы при основании; б) основания и углы при вершине.

III 4. Нарисуйте прямую и точку A вне ее. Проведите перпендикуляр AB к этой прямой. Пусть из точки K этой прямой отрезок AB виден под углом 30°, а из точки M этой прямой он виден под углом 45°. Под каким углом виден из точки A отрезок KM? (В задаче возможны два случая.)

Решите затем задачу в общем случае, когда данные углы равны φ_1 и φ_2.

III 5. Установите вид треугольника (по углам), если в нем: а) сумма двух углов равна третьему; б) сумма двух любых углов больше третьего; в) есть такие два угла, которые дают в сумме меньше, чем третий угол. Может ли быть в треугольнике, что любые два угла дают в сумме меньше, чем третий угол?

III 6. а) В равнобедренном треугольнике ABC $AB=BC$. Через вершину B проведите прямую, параллельную основанию треугольника. Докажите, что она делит пополам внешний угол при вершине B.

б) Сформулируйте и докажите утверждение, обратное утверждению а).

7. а) На одной стороне угла O отложите два отрезка OA_1 и A_1A_2, а на другой его стороне отложите отрезок $OB_1=OA_1$, а затем отрезок $B_1B_2=A_1A_2$. Докажите, что $A_2B_2 \parallel A_1B_1$.
б) Продолжите стороны угла за его вершину O. На его сторонах отложите два равных отрезка OA_1 и OB_1, а на их продолжениях — два равных отрезка OA_2 и OB_2. Докажите, что $A_2B_2 \parallel A_1B_1$.

8. а) Нарисуйте равнобедренный треугольник. Проведите медианы из вершин основания. Их концы соедините отрезком. Докажите, что он параллелен основанию.
б) Изменится ли результат, если вместо медиан в задаче а) провести биссектрисы?
в) Изменится ли результат, если вместо медиан в задаче а) провести высоты?
г) Сформулируйте и докажите утверждение, общее для задач а), б) и в).
д) Нарисуйте два равных треугольника ABC_1 и BAC_2, расположенные по одну сторону от прямой AB. Докажите, что $C_1C_2 \parallel AB$.

9. а) Нарисуйте окружность, а в ней диаметр. Из разных концов диаметра проведите параллельные хорды. Докажите, что они равны.
б) Сформулируйте и проверьте обратное утверждение.

10. Верны ли, по-вашему, такие утверждения:
а) если прямая пересекает одну из двух параллельных плоскостей, то она пересекает и другую из них;
б) если плоскость пересекает одну из двух параллельных плоскостей, то она пересекает и другую из них;
в) если прямая пересекает одну из двух перпендикулярных плоскостей, то она пересекает и другую из них;
г) если плоскость пересекает одну из двух перпендикулярных плоскостей, то она пересекает и другую из них;
д) если две прямые в пространстве перпендикулярны третьей прямой, то они параллельны между собой;
е) если две плоскости перпендикулярны третьей, то они параллельны между собой.

11. Для многогранника P, имеющего n вершин, произведите следующее вычисление: из числа $360°n$ вычтите сумму углов всех граней этого многогранника. Такое вычисление сделайте для: а) прямоугольного параллелепипеда; б) правильного тетраэдра; в) произвольного тетраэдра; г) четырехугольной пирамиды. Сравните результаты. Придумайте еще какой-нибудь многогранник (например, куб, на который поставлена четырехугольная пирамида) и проведите указанное вычисление. Что получилось?

Итоги 7 класса

Выделим основное, изученное вами в курсе 7 класса.

Во-первых, вы узнали о том, что такое геометрия, об ее истории и задачах, о ее роли в культуре, познакомились с разнообразными геометрическим фигурами, научились строить фигуры с теми или иными требуемыми свойствами.

Во-вторых, вы познакомились с аксиомами, лежащими в основаниях геометрии. Опираясь на них, стали доказывать, что построенные вами фигуры обладают требуемыми свойствами, а также доказывать теоремы, в которых по одним свойствам фигуры делают заключение о других ее свойствах. Чаще других аксиом вам приходилось использовать аксиому откладывания отрезка (п.3.1), аксиому о свойстве равных углов (п.6.2), аксиому откладывания угла (п.6.3), аксиому параллельности (п.14.2).

В-третьих, опираясь на эти аксиомы, вы доказали первые девять теорем. Эти девять теорем распадаются на три группы, по три теоремы в каждой группе. Сначала (в § 9 и 10) были доказаны три теоремы о равных треугольниках: теорема о равенстве соответственных углов равных треугольников и два признака равенства треугольников. Затем (в § 11 и 12) были доказаны три теоремы, связанные с равнобедренным треугольником: теорема о серединном перпендикуляре отрезка, теорема о свойствах равнобедренного треугольника и признак равнобедренного треугольника. Наконец, в главе III были доказаны еще три теоремы, связанные с параллельностью прямых: признак параллельности прямых, теорема об углах при параллельных и секущей и теорема о сумме углов треугольника.

В-четвертых, вы научились видеть и рисовать некоторые пространственные фигуры.

В-пятых, повысилась ваша логическая культура: вы узнали о взаимно обратных утверждениях, о способе доказательства от противного и о других общематематических понятиях.

В-шестых, решая разнообразные задачи, вы постоянно развиваете свои умственные способности.

8 класс

IV ГЛАВА Площади многоугольных фигур

В этой главе мы рассмотрим задачи, с которых и началась геометрия, — это задачи об измерении площадей. Такие задачи решали еще в Древнем мире.

§ 16 Многоугольники и многоугольные фигуры

16.1 Ломаная. **Ломаной линией** или, короче, **ломаной** называется фигура, состоящая из отрезков (*рис. 151*). Эти отрезки следуют друг за другом: один из концов первого отрезка служит концом второго, другой конец второго служит концом третьего и т. д. При этом соседние отрезки не лежат на одной прямой. Ломаную обозначают (и называют) по последовательным концам ее отрезков. Так, на *рисунке 151, а* изображена ломаная $ABCDEFG$.

Концы ломаной могут совпадать. Тогда ломаная называется **замкнутой** (*рис. 151, б, в*). Ломаная может пересекать сама себя, как на *рисунке 151, г*, коснуться сама себя, как на *рисунке 151, д*, а также налегать на себя, как на *рисунке 151, е*. Если таких особенностей у ломаной нет, то она называется **простой** (*рис. 151, а—в*).

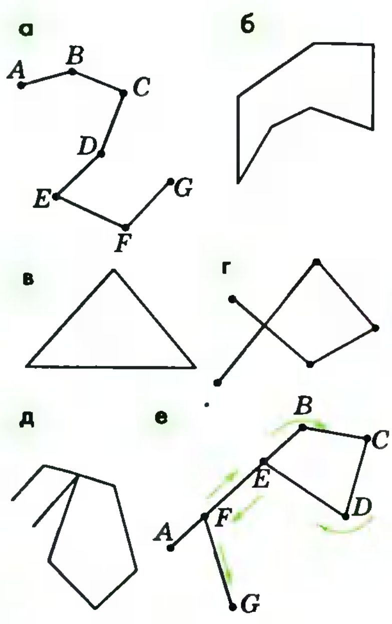


Рис. 151

16.2 Многоугольники. Простая замкнутая ломаная вместе с частью плоскости, ограниченной ею, называется **многоугольником** (*рис. 152*).

Сама ломаная называется **границей** этого многоугольника, составляющие ее отрезки — его **сторонами**, а концы этих отрезков — его **вершинами**.

В каждой вершине многоугольника его стороны задают некоторый **угол многоугольника**. Он может быть как меньше развернутого (*рис. 153, а*), так и больше развернутого (*рис. 153, б*).

Число сторон многоугольника равно числу его вершин, т. е. числу его углов. Многоугольник называют по числу

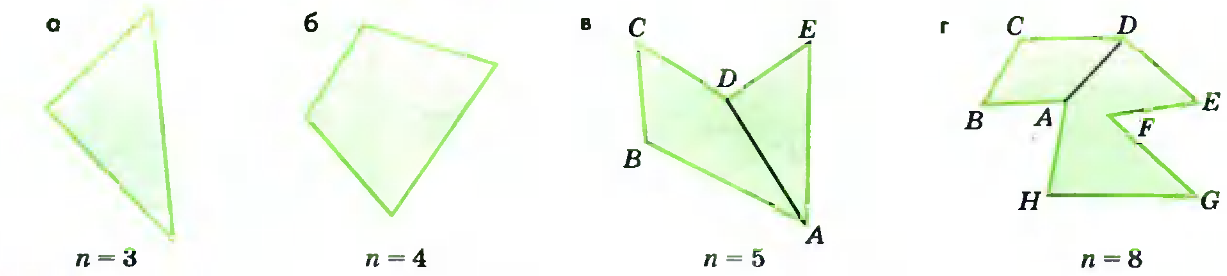


Рис. 152

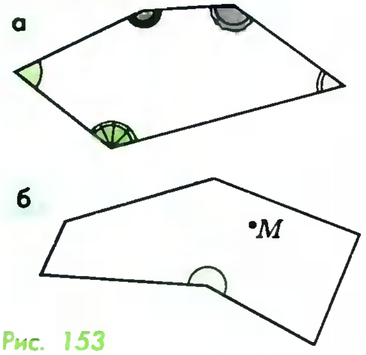


Рис. 153

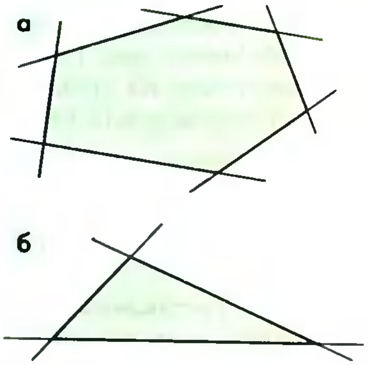


Рис. 154

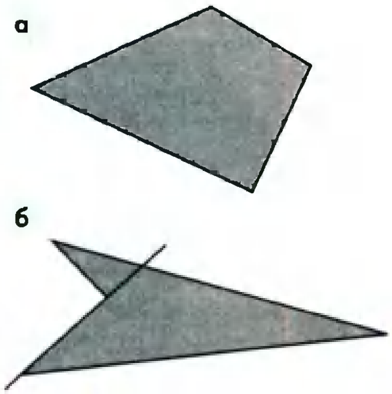


Рис. 155

углов: треугольник, четырехугольник и т. д. Когда число углов многоугольника равно n, то говорят «n-угольник» (читается «эн-угольник»). Стороны и углы многоугольника называют его элементами.

О точках многоугольника, не лежащих на его границе, говорят, что они лежат **внутри многоугольника.** Например, точка M на *рисунке 153, б* лежит внутри многоугольника.

Диагональю многоугольника называется отрезок, соединяющий его несоседние вершины (например, AD на *рисунке 152*).

16.3 **Выпуклые и невыпуклые многоугольники.** Из всех многоугольников самые важные — выпуклые. **Многоугольник** называется **выпуклым**, если каждая прямая, содержащая сторону многоугольника, не пересекает других его сторон (*рис. 154*). Иначе говоря, выпуклый многоугольник лежит по одну сторону от каждой такой прямой.

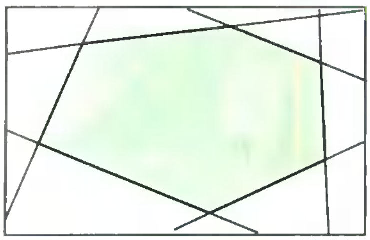
Каждый треугольник является выпуклым многоугольником (*рис. 154, б*). Но, например, для четырехугольников это уже не всегда так (*рис. 155*). Многоугольники, которые не являются выпуклыми, так и называются — невыпуклыми многоугольниками.

Выпуклые многоугольники обладают многими интересными свойствами. Эти свойства составляют целый раздел современной геометрии. До сих пор находят новые свойства выпуклых многоугольников. Укажем наглядно очевидные свойства выпуклых многоугольников.

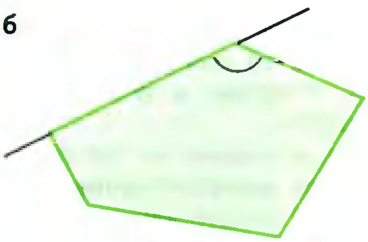
1. Выпуклый многоугольник можно вырезать из плоскости, разрезая ее по прямым (как из листа бумаги, разрезая его до краев, *рис. 156, а*).
2. У выпуклого многоугольника все углы меньше $180°$ (*рис. 156, б*).
3. Каждая диагональ выпуклого многоугольника содержится в нем (*рис. 156, в*).

16.4 **Четырехугольник.** У четырехугольника четыре вершины, четыре угла, а также четыре стороны (*рис. 157*). Четырехугольник принято обозначать его вершинами, выписывая их в порядке обхода, например $ABCD$ на *рисунке 157*.

а



б



в

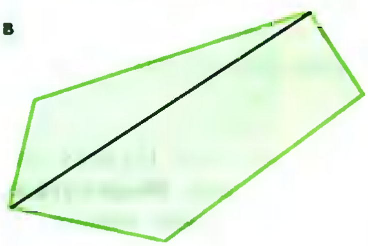
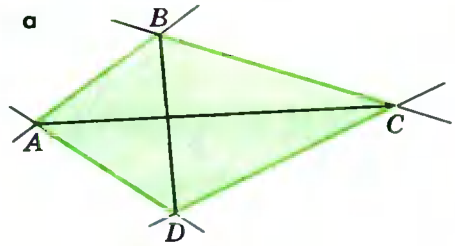


Рис. 156

а



б

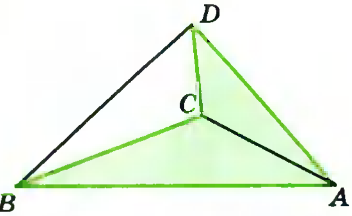


Рис. 157

Стороны четырехугольника, имеющие общие концы, называются **смежными**, а не имеющие общих концов — **противоположными**. Вершины, соединенные стороной, называются **соседними**, а не соединенные стороной — **противоположными**.

У каждого четырехугольника две диагонали — это отрезки, соединяющие противоположные вершины четырехугольника. **Диагонали выпуклого четырехугольника пересекаются (*рис. 157,а*), а невыпуклого не пересекаются (*рис. 157, б*).**

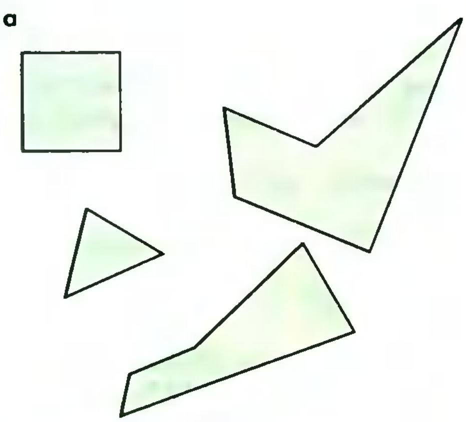
Напомним, что **сумма углов любого четырехугольника равна 360°**.

16.5 **Многоугольные фигуры.** Многоугольной фигурой называется объединение конечного числа многоугольников (*рис. 158*). Многоугольная фигура может состоять из многоугольников, вовсе не имеющих общих точек (*рис. 158, а*) или имеющих только отдельные общие точки на границе (*рис. 158, б*). (Так, архипелаг состоит из островов или квартира слагается из отдельных комнат.)

Будем говорить, что многоугольные фигуры **не перекрываются**, если они не имеют общих внутренних точек (на *рисунке 159* фигуры P и Q перекрываются, а R, S и T не перекрываются).

Говорят, что многоугольная фигура F **составлена** (или **состоит**) из данных многоугольных фигур, если она является их объединением, а сами эти фигуры не перекрыва-

а



б

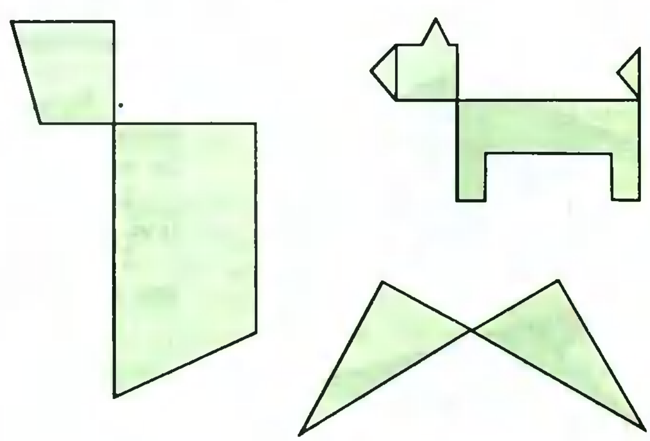


Рис. 158

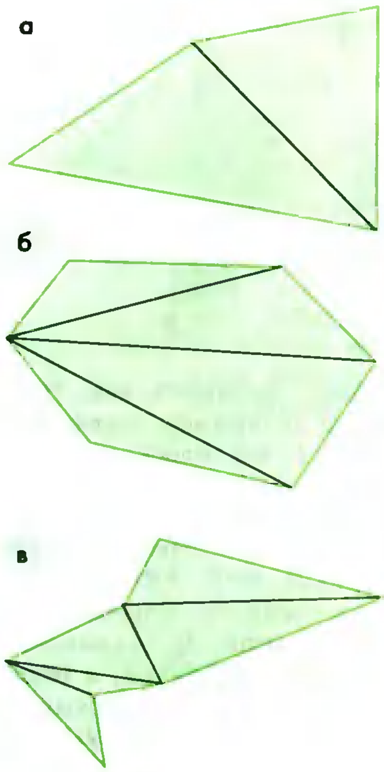


Рис. 160

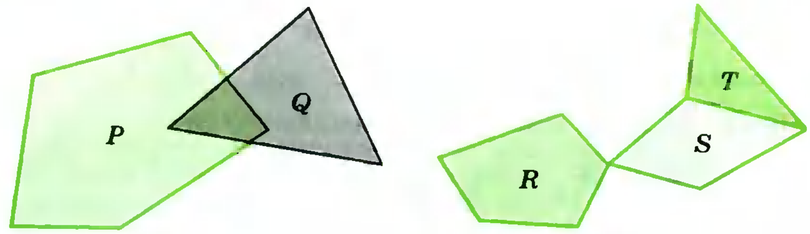


Рис. 159

ются *(рис. 160)*. В этом случае говорят также, что многоугольная фигура F **разбита** на данные многоугольные фигуры.

Например, каждый четырехугольник можно разбить на два треугольника диагональю *(рис. 160, а)*. Выпуклый многоугольник разбивается на треугольники диагоналями, проведенными из любой его вершины *(рис. 160, б)*.

Диагоналями можно разбить на треугольники любой многоугольник (но не обязательно идущими из одной вершины, *рис. 160, в*).

Поскольку каждый многоугольник составляется из треугольников, а каждая многоугольная фигура составляется из многоугольников, то каждую многоугольную фигуру можно составить из треугольников.

Верно и обратное: каждая фигура, составленная из треугольников, будет многоугольной (по определению).

16.6 **Пирамиды.**

Вы уже знаете о знаменитых египетских пирамидах *(рис. 161)*. У них четыре треугольные боковые грани опираются на квадратное основание. У боковых граней есть общая вершина — вершина пирамиды. Каждая ее боковая грань является равнобедренным треугольником. Такая пирамида называется правильной четырехугольной. Итак, **правильная четырехугольная пирамида** — эта такая четырехугольная пирамида, у которой в основании находится квадрат и все боковые ребра равны между собой *(рис. 162, а)*.

Уже известный вам тетраэдр также является пирамидой — треугольной пирамидой. В тетраэдре любая грань может служить основанием, тогда остальные три грани будут боковыми. Если одна из граней треугольной пирамиды (основание) — равносторонний треугольник, а остальные три грани (боковые) — равнобедренные треугольники, то она называется правильной треугольной пирамидой *(рис. 162, б)*. Итак, **правильная треугольная пирамида** — эта такая треугольная пирамида, у которой в основании находится равносторонний треугольник и все боковые ребра равны между собой.

Важный частный случай правильной треугольной пирамиды — **правильный тетраэдр**, когда все четыре грани — равносторонние треугольники.

Правильным тетраэдром называется тетраэдр, все ребра которого равны *(рис. 162, в)*.

Рис. 161

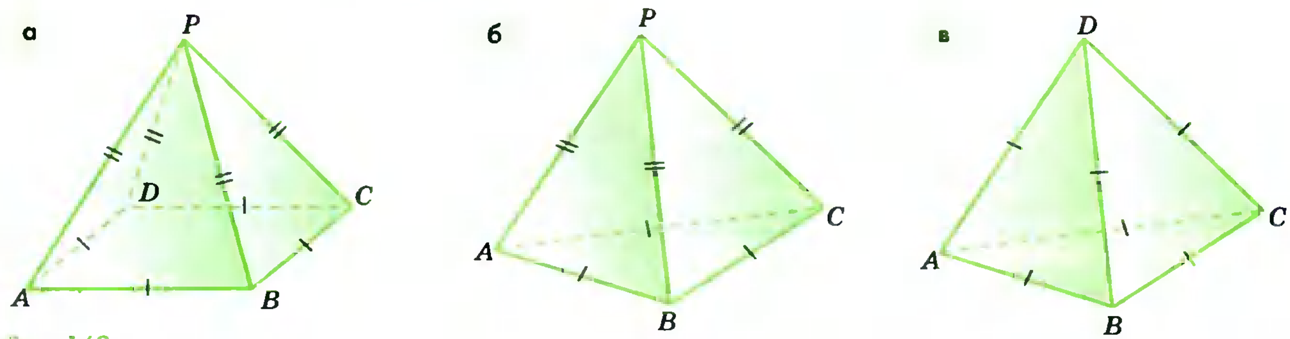


Рис. 162

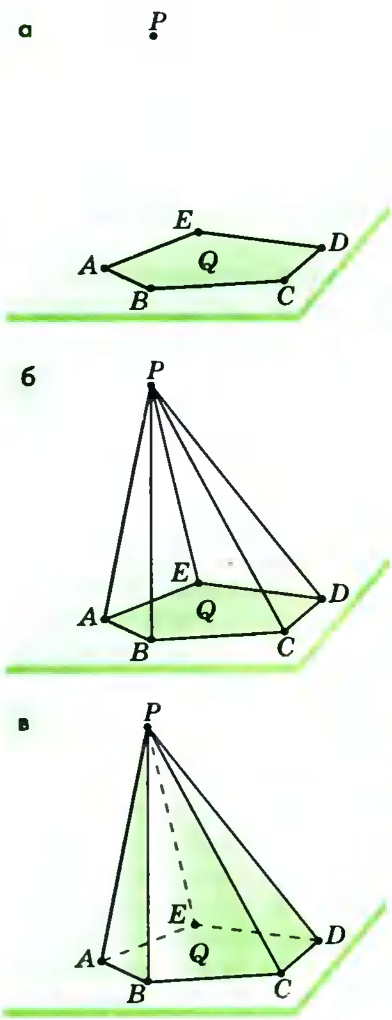


Рис. 163

Произвольную пирамиду можно построить так. Возьмем некоторый многоугольник Q (например, пятиугольник $ABCDE$) и некоторую точку P вне плоскости этого многоугольника Q (*рис. 163, а*). Соединим отрезками точку P со всеми вершинами многоугольника Q (*рис. 163, б*). Если теперь на полученный «каркас» из отрезков «натянуть» треугольники PAB, PBC, PCD, PDE, PEA, то вместе с многоугольником Q они в пространстве ограничат пирамиду (*рис. 163, в*). Многоугольник Q называется основанием пирамиды, точка P — ее вершиной, а отрезки PA, PB, PC, PD, PE — боковыми ребрами пирамиды.

Мы построили пятиугольную пирамиду $PABCDE$. Если же в основании пирамиды лежит n-угольник, то пирамиду называют n-угольной.

Рисовать пирамиду всегда начинайте с основания пирамиды (считая его горизонтальным), а вершину пирамиды выбирайте над основанием.

Отметим, что любой тетраэдр можно изображать любым выпуклым четырехугольником с проведенными диагоналями (одна из которых — штриховая линия). Поэтому при изображении правильных треугольных пирамид следует указывать нужные равенства их ребер.

1. Что такое многоугольник?
2. Перечислите основные элементы многоугольника.
3. Какие бывают многоугольники? Чем они отличаются?
4. Перечислите свойства выпуклых многоугольников.
5. Что такое многоугольная фигура?
6. Как построить пирамиду?
7. Когда правильная треугольная пирамида будет правильным тетраэдром?

Задачи к § 16

16.1. Докажите, что сумма углов выпуклого n-угольника равна $180°\,(n-2)$. Верен ли этот результат для невыпуклого n-угольника?

16.2. Посмотрите на *рисунок 164*. Назовите несколько многоугольников (но не треугольников) в каждой из этих фигур. Назовите замкнутые ломаные, ограничивающие эти многоугольники. Какие из названных вами многоугольников выпуклые?

16.3. Нарисуйте выпуклый пятиугольник. Сколько в нем вершин? сторон? диагоналей, выходящих из одной и той же вершины? всего диагоналей? Попытайтесь ответить на те же вопросы для выпуклого n-угольника.

16.4. На *рисунке 165* указаны равные элементы четырехугольника $ABCD$. Какие еще элементы такого четырехугольника равны?

16.5. Какая из фигур на *рисунке 166* является многоугольной фигурой?

16.6. Нарисуйте равносторонний треугольник. Как его разбить на: а) два прямоугольных треугольника; б) три прямоугольных треугольника; в) шесть равных прямоугольных треугольников; г) четыре равных равносторонних треугольника?

16.7. Нарисуйте всевозможные многоугольные фигуры, которые можно составить из двух равных неперекрывающихся треугольников: а) равносторонних; б) равнобедренных; в) прямоугольных.

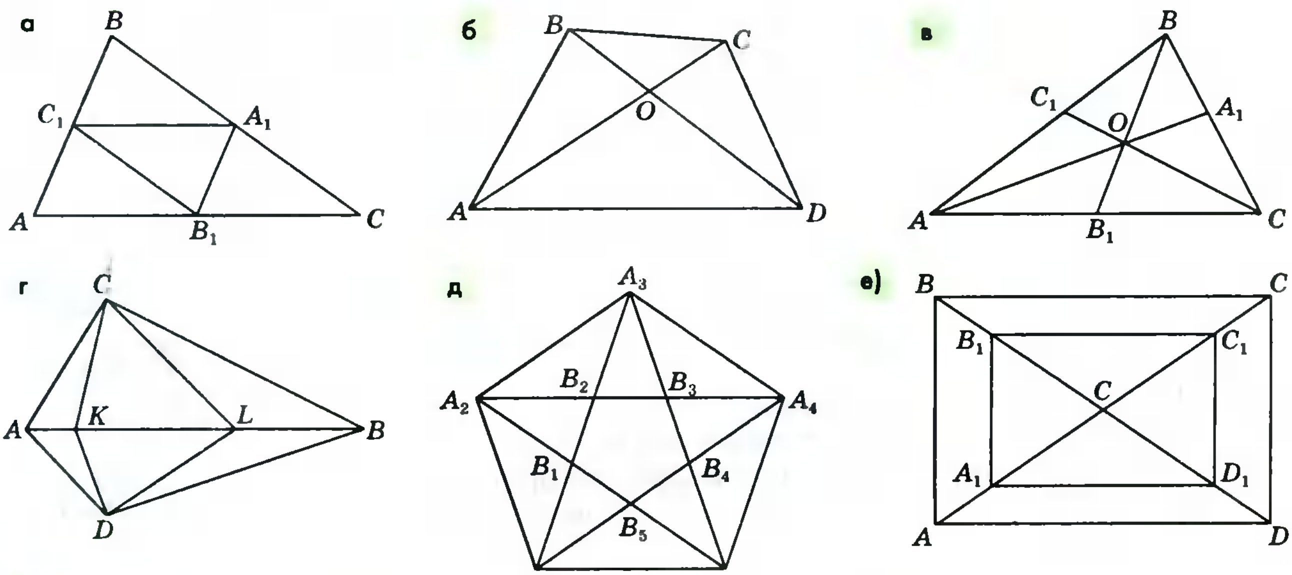


Рис. 164

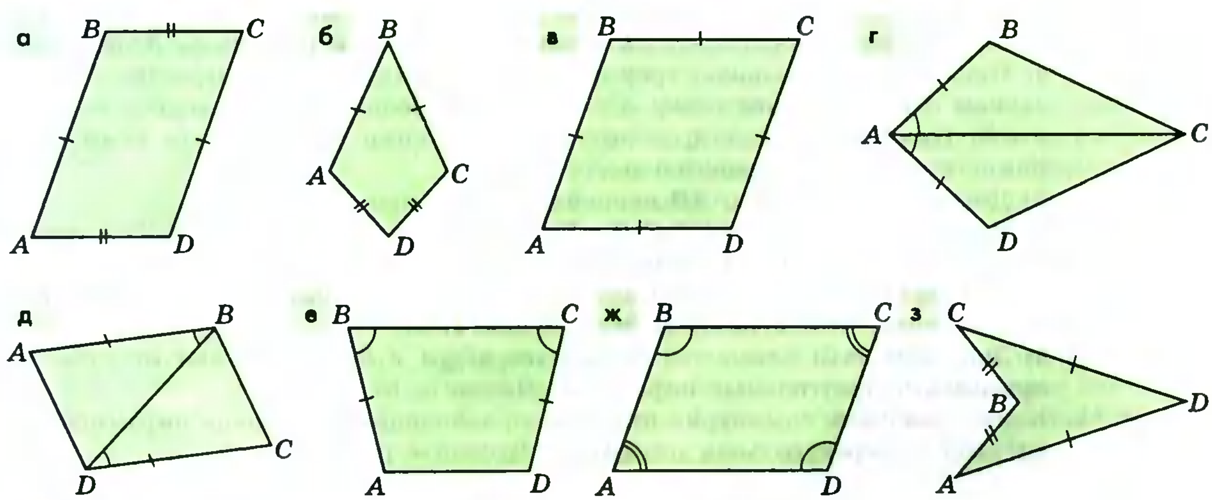


Рис. 165

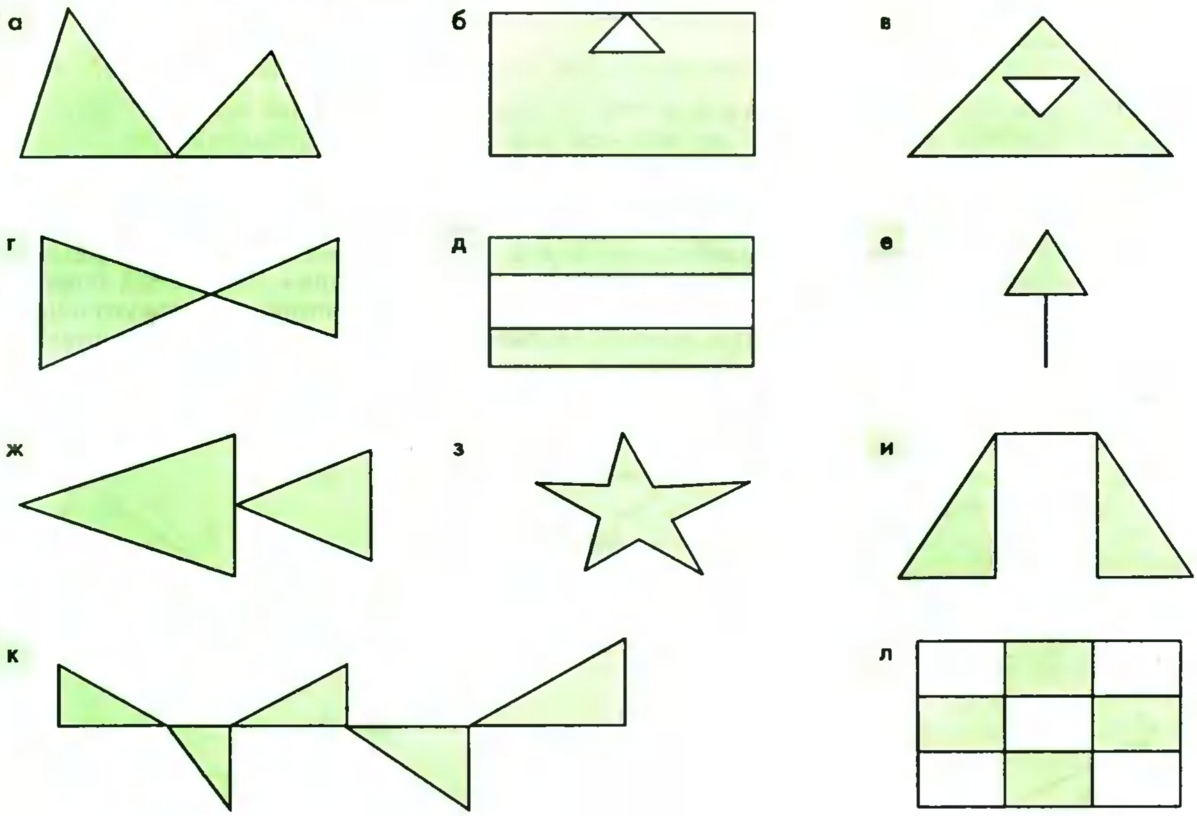


Рис. 166

16.6 **16.8.** а) Нарисуйте правильную четырехугольную пирамиду $PABCD$ с вершиной P и основанием $ABCD$. Проведите в основании диагонали AC и BD. Треугольники PAC и PBD пересекутся по отрезку PO, где O — точка пересечения диагоналей AC и BD.

б) Назовите равные друг другу треугольники на сделанном вами рисунке. Какие среди них прямоугольные?

в) Докажите, что PO — перпендикуляр, опущенный из вершины P на плоскость основания пирамиды. Он называется **высотой пирамиды** $PABCD$.

16.9. а) Нарисуйте правильную треугольную пирамиду $PABC$ с вершиной P и основанием ABC. Отметьте точку K — середину ребра AB и проведите отрезки PK и CK. Назовите равные друг другу треугольники на сделанном вами рисунке. Какие среди них прямоугольные?

б) Докажите, что ребро AB перпендикулярно плоскости PKC.

16.10. а) Нарисуйте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Выделите его вершины A_1B, C_1D и соедините их шестью отрезками. Назовите равные друг другу треугольники на сделанном вами рисунке. Какие среди них прямоугольные? Какие равносторонние?

б) Докажите, что тетраэдр A_1BC_1D правильный.

в) Докажите, что плоскости граней тетраэдра A_1BC_1D отсекают от куба четыре правильные треугольные пирамиды. Назовите их.

16.11. Какие плоскости симметрии имеет: а) правильная треугольная пирамида; б) правильная четырехугольная пирамида? Сделайте рисунки.

§ 17 Площадь многоугольной фигуры

17.1 **Понятие площади. Равновеликие фигуры.** Понятие о площади имеет каждый: площадь комнаты, площадь участка земли... Если участок земли состоит из нескольких участков, то его площадь слагается из их площадей. Также ясно, что у одинаковых участков одна и та же площадь. Это представление о площади кладется в основу определения площади многоугольных фигур.

Определение. Для многоугольных фигур **площадью** называется положительная величина с такими основными свойствами:

1. Если фигура составлена из нескольких многоугольных фигур, то ее площадь равна сумме площадей этих фигур.
2. Равные треугольники имеют одну и ту же площадь.

Площадь фигуры F будем обозначать $S(F)$.

Фигуры, имеющие одну и ту же площадь, называются **равновеликими.** Простейший пример равновеликих фигур дают равные треугольники, они равновелики по свойству 2. Используя свойство 1, получаем более общее утверждение: **если две фигуры составлены из попарно равных треугольников, то они равновелики** *(рис. 167, а)*. В частности, квадраты с равными сторонами (равные квадраты) равновелики. Действительно, диагонали разбивают их на равные прямоугольные треугольники *(рис. 167, б)*.

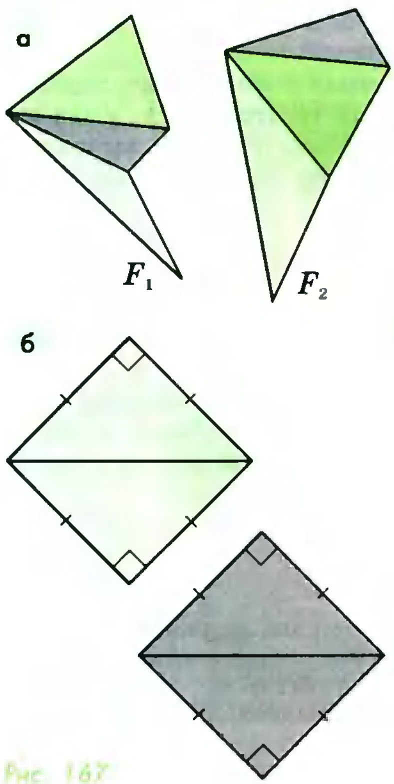


Рис. 167

17.2 **Измерение площади.** Измерение площади состоит в сравнении площади данной фигуры с площадью фигуры, принятой за единицу измерения. В результате получается **численное значение площади** данной фигуры.

Площадь поверхности многогранника — это сумма площадей всех его граней.

Численное значение площади многоугольной фигуры — это число, показывающее, во сколько раз площадь данной фигуры больше (или меньше) площади фигуры, принятой за **единицу измерения площади.**

За единицу измерения принимают площадь подходящего квадрата. Жилую площадь измеряют в квадратных метрах, площадь государства — в квадратных километрах, площадь участка земли — в гектарах или сотках. Тогда пишут, например, 15 м^2 или 3,5 га. Когда единица измерения площади не указана, мы будем считать, что выбран некоторый квадрат и его площадь принята за единицу. В этом случае для площади фигуры F пишем, например, $S(F)=25$ кв. ед. Запись $S(F)=25$ является сокращением записи $S(F)=25$ кв. ед.

Вы должны уметь перейти от одной единицы площади к другой. Покажем на примере, как это делается.

$12\ \text{га}=12\cdot 1\ \text{га}=12\cdot 100\ \text{м}\cdot 100\ \text{м}=120\,000\cdot 1\ \text{м}^2=120\,000\ \text{м}^2.$

17.3 **Площадь прямоугольника.** Вам давно известно, что **площадь прямоугольника равна произведению его сторон.** А именно если P — прямоугольник со сторонами a и b, то его площадь

$$S=ab. \qquad (1)$$

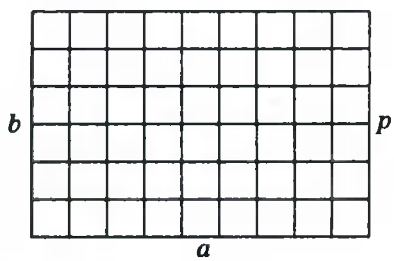


Рис. 168

Эту формулу вы вывели еще в начальной школе, когда измеряли площадь прямоугольника P, длины сторон которого — целые числа a и b. Сделали это так. Разбили прямоугольник P на единичные квадраты *(рис. 168)*. Получили b рядов, в каждом из которых по a квадратов. Всего ab квадратов (единичных). Сложив их площади, получим формулу (1).

Как видите, при этом выводе мы сначала выбрали единицу измерения площади, а потом опирались на свойства площади. Этим же способом можно доказать, что формула (1) справедлива для прямоугольников, длины сторон которых необязательно целые числа. Для этого придется разбивать единичный квадрат на более мелкие квадраты и покрывать ими прямоугольник P *(рис. 169)*.

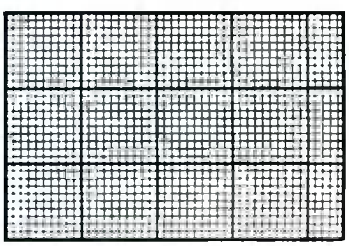


Рис. 169

Формулой (1) мы воспользуемся в следующем параграфе при выводе формулы площади треугольника. Умея вычислять площадь треугольника, мы сможем вычислять площади любых многоугольных фигур, разбивая их на треугольники.

1. Какие вы знаете свойства площади многоугольных фигур?
2. В чем заключается процесс измерения площади?
3. Запишите формулу площади прямоугольника и формулу площади квадрата со стороной a.

Задачи к § 17

17.1 **17.1.** Нарисуйте многоугольник F_1, составленный из четырех равных равносторонних треугольников. Нарисуйте еще один многоугольник F_2, составленный из четырех таких же треугольников. Объясните, почему $S(F_2)=S(F_1)$.

17.2. а) Докажите, что треугольники T_1 и T_2 на *рисунке 170* равновелики.
б) Найдите равновеликие треугольники на *рисунке 171*.

17.3 **17.3.** Вычислите площадь прямоугольника, длины сторон которого равны: а) 23 см и 18 мм; б) 2,5 м и 78 см; в) 3,8 км и 500 м. Выразите площадь в задаче а) в квадратных миллиметрах, в задаче б) в квадратных метрах, в задаче в) в гектарах.

17.4. а) Нарисуйте квадрат. Нарисуйте другой квадрат, сторона которого в 2 раза больше, чем сторона первого квадрата. Во сколько раз площадь второго квадрата больше площади первого?

б) Что происходит с площадью квадрата, если его сторона изменяется (увеличивается или уменьшается) в несколько раз?

в) Пусть площадь первого квадрата в 100 раз больше площади второго. Во сколько раз больше сторона первого квадрата? Сформулируйте вопрос и результат в общем случае.

17.5. Нарисуйте прямоугольник. Пусть его основание равно d, а высота равна h. Запишите формулу его площади.

а) Пусть основание увеличилось в 2 раза, а высота не изменилась. Что произошло с площадью?

б) Пусть основание уменьшилось в 5 раз, а высота не изменилась. Что произошло с площадью?

в) Пусть основание изменяется, а высота остается неизменной. Объясните, почему зависимость между площадью и основанием является прямой пропорциональностью.

г) Какой является зависимость между площадью и высотой прямоугольника при постоянном основании?

д) Пусть основание прямоугольника увеличилось в 3 раза. Что надо сделать с его высотой, чтобы площадь его не изменилась?

е) Объясните, почему при постоянной площади изменяющегося прямоугольника его основание и высота являются обратно пропорциональными величинами.

17.6. Что произойдет с площадью прямоугольника, если: а) основание увеличить в 2 раза, а высоту увеличить в 3 раза; б) основание уменьшить в 4 раза, а высоту увеличить в 6 раз; в) и основание, и высоту уменьшить в 1,5 раза?

17.7. Как вы будете вычислять площади фигур на *рисунке 172*? При этом желательно сделать как можно меньше измерений.

17.8. Для облицовки стены дома имеются равные квадратные плитки. Как вы узнаете, сколько понадобится плиток? Такую же задачу можно сочинить и про оклейку стен комнаты обоями. Сделайте это. Как вы решите эту задачу?

17.9. Найдите площадь поверхности и объем прямоугольного параллелепипеда, у которого длины ребер равны: а) 2, 3, 4; б) a, b, c.

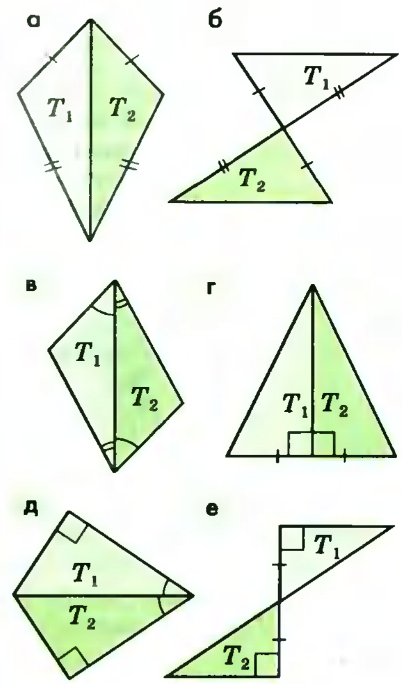


Рис. 170

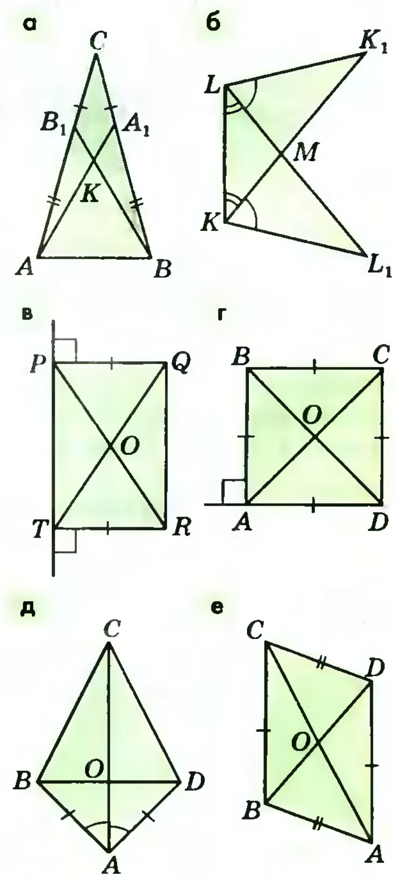


Рис. 171

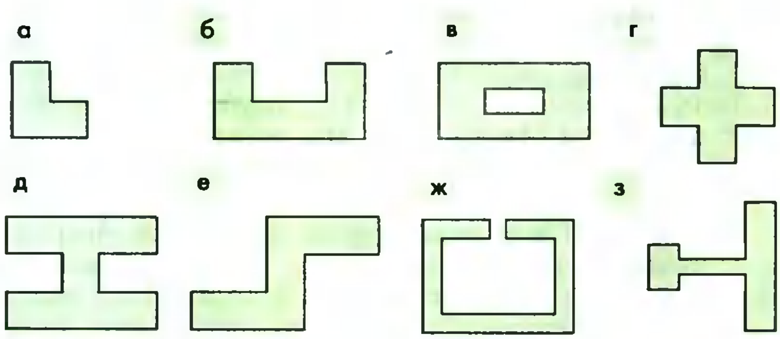


Рис. 172

17.10. Ребро куба увеличили в 3 раза. Как изменится: а) сумма длин ребер куба; б) площадь поверхности куба, т. е. сумма площадей его граней; в) объем куба? Обобщите результаты.

17.11. а) Куб с ребром 1 м разрезали на кубы с ребрами 1 дм. Сравните сумму площадей поверхностей полученных кубов с площадью поверхности исходного куба.
б) Решите такую же задачу, если куб разрезали на кубы с ребрами 1 см.
в) Можно ли куб с ребром 1 м так разрезать на кубы с равными ребрами, чтобы суммарная площадь их поверхностей стала больше 1 км^2?

§ 18 Площадь треугольника и трапеции

18.1 **Площадь прямоугольного треугольника.** Сначала мы докажем вспомогательное утверждение — *лемму* о площади прямоугольного треугольника. (Леммой называется теорема, имеющая значение не столько сама по себе, сколько для доказательства других теорем.)

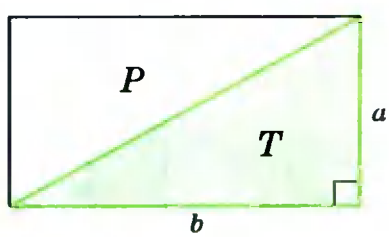


Рис. 173

Лемма. **Площадь прямоугольного треугольника равна половине произведения его катетов.**

• **Доказательство.** Пусть дан прямоугольный треугольник T с катетами a и b (*рис. 173*). Достроим его до прямоугольника P со сторонами a и b (см. п. 14.5). Гипотенуза треугольника T разбивает прямоугольник P на два равных треугольника.

Поэтому $S(P)=2S(T)$. Так как $S(P)=ab$, то $S(T)=\frac{1}{2}ab$.

18.2 **Площадь произвольного треугольника.**

Теорема 10. **Площадь треугольника равна половине произведения его стороны и проведенной к ней высоты.**

Сторону, к которой проводится высота, обычно называют основанием и теорему формулируют кратко: *площадь треугольника равна половине произведения основания и высоты.*

• **Доказательство.** Рассмотрим какой-нибудь треугольник ABC. Обозначим его T. Сторону треугольника T, противоположную вершине C, обозначим c, а опущенную из вершины C высоту CH обозначим h_c. Мы должны доказать, что

$$S(T) = \frac{1}{2}ch_c. \qquad (1)$$

Для точки H возможны три случая ее расположения.

1. Точка H совпадает с одним из концов основания c, например с точкой A (*рис. 174, а*). В этом случае высота h_c совпадает со стороной CA, так что треугольник T прямоугольный. Его катеты — отрезки $CA = h_c$ и $BA = c$. По

лемме п. 18.1 получаем, что $S(T) = \frac{1}{2}ch_c$, т. е. выполняется формула (1).

2. Точка H лежит внутри основания c (рис. 174, б). Тогда высота CH разбивает треугольник T на два прямоугольных треугольника T_1 и T_2 с катетами c_1 и c_2 и общим катетом h_c.

Площади треугольников T_1 и T_2 вычисляются по формулам

$$S(T_1)=\frac{1}{2}c_1h_c \text{ и } S(T_2)=\frac{1}{2}c_2h_c.$$

А так как

$$S(T)=S(T_1)+S(T_2),$$

то

$$S(T)=\frac{1}{2}\ c_1h_c+\frac{1}{2}c_2h_c=\frac{1}{2}(c_1+c_2)h_c=\frac{1}{2}ch_c,$$

т. е. формула (1) выведена и во втором случае.

3. Точка H лежит вне основания c, например, так, что точка B лежит между A и H (рис. 174, в). Тогда прямоугольный треугольник $T_1=\triangle ACH$ разбивается отрезком CB на треугольник T и прямоугольный треугольник $T_2=\triangle BCH$.

Поэтому $S(T_1)=S(T)+S(T_2)$. Следовательно,

$$S(T)=S(T_1)-S(T_2).$$

Поскольку $S(T_1)=\frac{1}{2}c_1h_c$, $S(T_2)=\frac{1}{2}c_2h_c$ и $c=c_1-c_2$, то

$$S(T)=\frac{1}{2}c_1h_c-\frac{1}{2}c_2h_c=\frac{1}{2}(c_1-c_2)h_c=\frac{1}{2}ch_c.$$

Утверждение теоремы доказано во всех случаях.

Замечание. Принято высоты, опущенные на стороны a, b, c, обозначать h_a, h_b, h_c, а площадь — S. Согласно доказанной теореме $S=\frac{1}{2}ah_a=\frac{1}{2}bh_b=\frac{1}{2}ch_c$ (рис. 175).

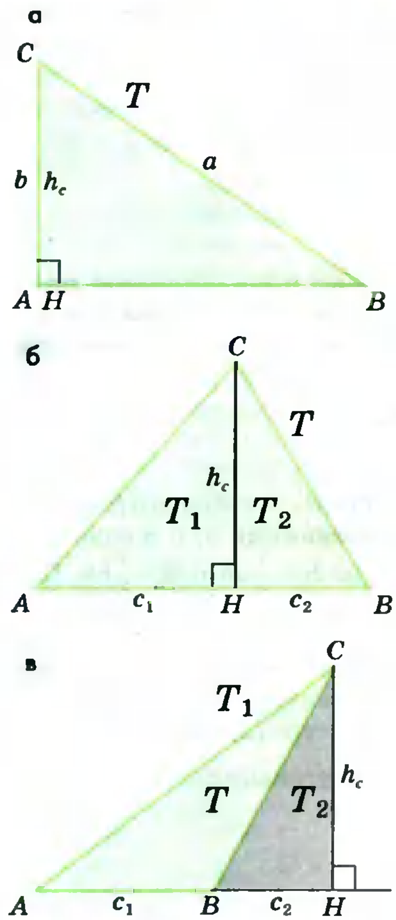


Рис. 174

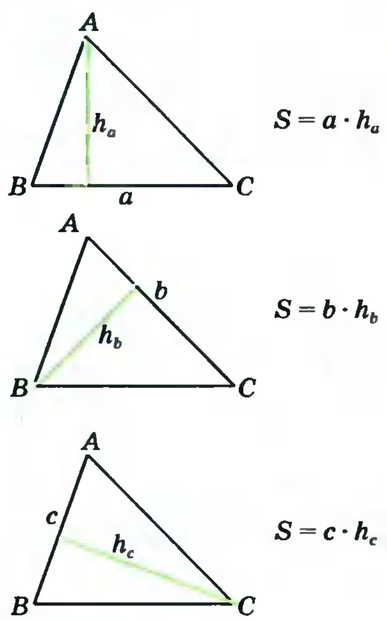


Рис. 175

18.2 Трапеция. Как уже сказано, площадь многоугольника, а значит, и четырехугольника вычисляют, разбивая его на треугольники. Но для некоторых четырехугольников этого можно не делать, например для прямоугольника. Мы изучим еще два вида таких четырехугольников — трапецию и параллелограмм. Они определяются парами параллельных сторон: в трапеции одна такая пара, а в параллелограмме две (рис. 176).

Итак, **трапецией называется четырехугольник, у которого только одна пара параллельных сторон.**

Параллельные стороны трапеции называются ее **основаниями**, а две другие — **боковыми сторонами**. Трапеция,

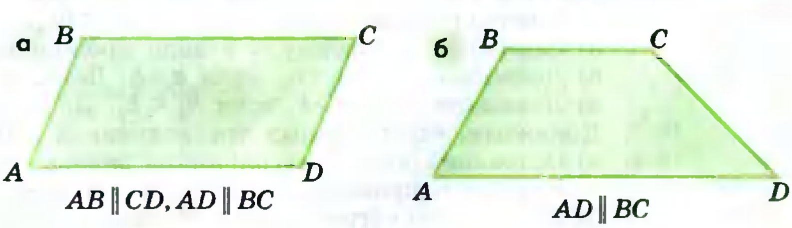


Рис. 176

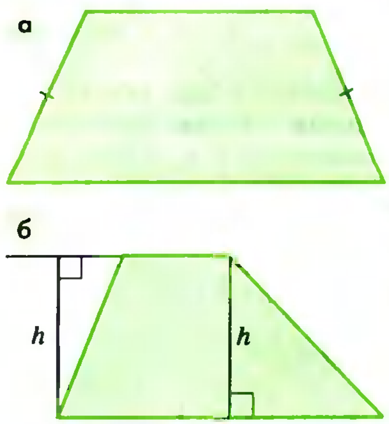


Рис. 177

боковые стороны которой равны, называется **равнобедренной** (или **равнобокой**, *рис. 177, а*). **Высотой трапеции** называется общий перпендикуляр ее оснований (или прямых, содержащих основания, *рис. 177, б*). Высотой называется также длина этого перпендикуляра.

18.4 Площадь трапеции

Теорема 11. **Площадь трапеции равна произведению полусуммы оснований и высоты, т. е. если a и b — основания трапеции, h — высота и S — площадь трапеции, то**

$$S = \frac{a+b}{2}h. \qquad (2)$$

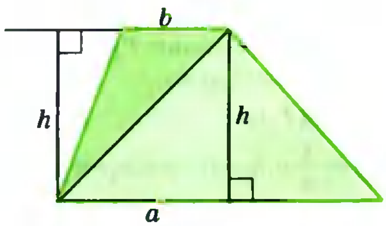


Рис. 178

• **Доказательство.** Проведя диагональ трапеции (*рис. 178*), получим два треугольника с основаниями a, b и одной высотой h. Их площади будут равны $S_1 = \frac{1}{2}ah$ и $S_2 = \frac{1}{2}bh$. Площадь же трапеции $S = S_1 + S_2 = \frac{a+b}{2}h$.

Замечание. Треугольник можно считать вырожденной трапецией, когда одно из ее оснований «стянулось» в точку, т. е. $b = 0$, тогда из равенства (2) получается равенство $S = \frac{1}{2}ah$ для площади треугольника.

?

1. Как вычислить площадь прямоугольного треугольника?
2. Как вычислить площадь треугольника?
3. Можно ли площадь прямоугольного треугольника вычислять по формуле площади треугольника?
4. Нарисуйте любой многоугольник. Предложите способ вычисления его площади.
5. Что такое трапеция и равнобедренная трапеция?
6. Как из формулы площади трапеции получить формулы площади прямоугольника и площади треугольника?

Задачи к § 18

18.1. Докажите, что в прямоугольном треугольнике произведение катетов равно произведению гипотенузы и высоты, проведенной к ней. Каждую из величин в этой формуле выразите через остальные. Запишите эту формулу в виде пропорции.

18.2. Пусть a и b — две стороны треугольника, h_a и h_b — проведенные к ним высоты треугольника. Докажите, что $ah_a = bh_b$.
а) Запишите эту формулу в виде пропорции.
б) Докажите, что $h_a = h_b$, если $a = b$. Докажите обратное утверждение.
в) Докажите, что $a > b$, если $h_a < h_b$. Докажите обратное утверждение.

18.3. Докажите, что в равных треугольниках соответственные высоты равны.

18.4. а) Основания двух треугольников равны. Докажите, что их площади относятся как высоты, проведенные к этим основаниям.
б) Высоты двух треугольников равны. Докажите, что площади этих треугольников относятся как основания, к которым проведены эти высоты.

18.5. Дана равнобокая трапеция.

а) Из вершин меньшего основания опущены высоты на большее основание. Докажите, что они отсекают от трапеции равные треугольники.

б) Докажите, что углы при каждом основании равны.

в) Докажите, что диагонали трапеции равны.

13.1 **18.6.** Вычислите площадь прямоугольного треугольника, катеты которого равны: а) 62 см и 25 мм; б) 54 дм и 58 см. Выразите ее в квадратных сантиметрах.

18.7. Запишите формулу зависимости площади прямоугольного треугольника от длин его катетов.

а) Что произойдет с площадью, если, не меняя одного из катетов, другой: 1) увеличить в 2 раза; 2) уменьшить в 3 раза?

б) Пусть один из катетов не меняется. Какой будет зависимость между площадью и другим катетом?

в) Пусть один из катетов увеличился в 10 раз. Что надо сделать с другим катетом, чтобы площадь треугольника не изменилась?

г) Пусть площадь треугольника остается одной и той же. Какой зависимостью связаны между собой его катеты?

18.8. Какую часть составляет площадь фигуры S от площади треугольника ABC на *рисунке 179*? Точки K, L, M — середины сторон треугольника.

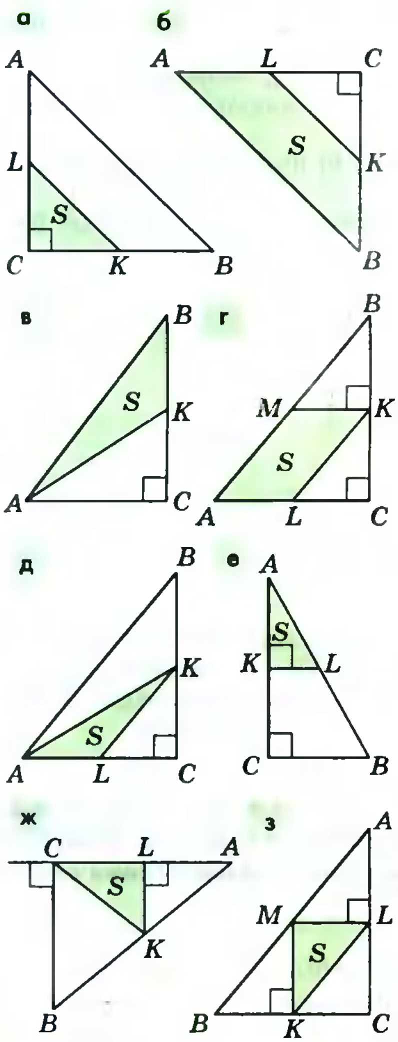


Рис. 179

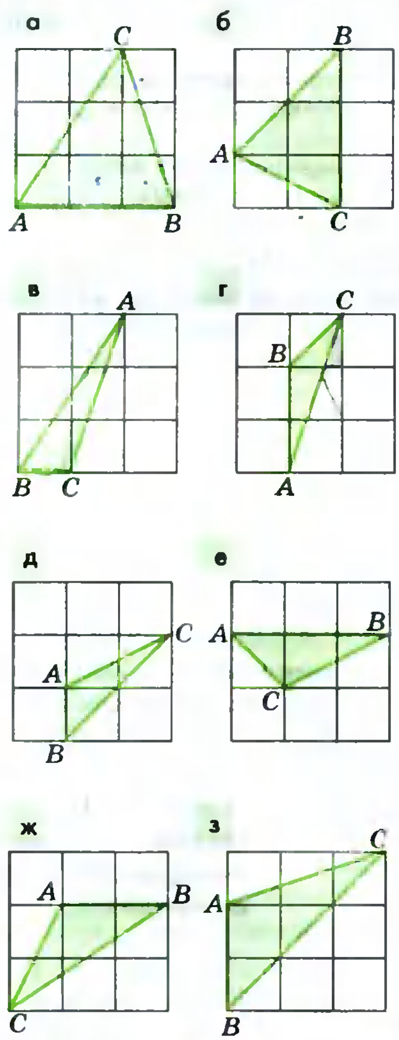


Рис. 180

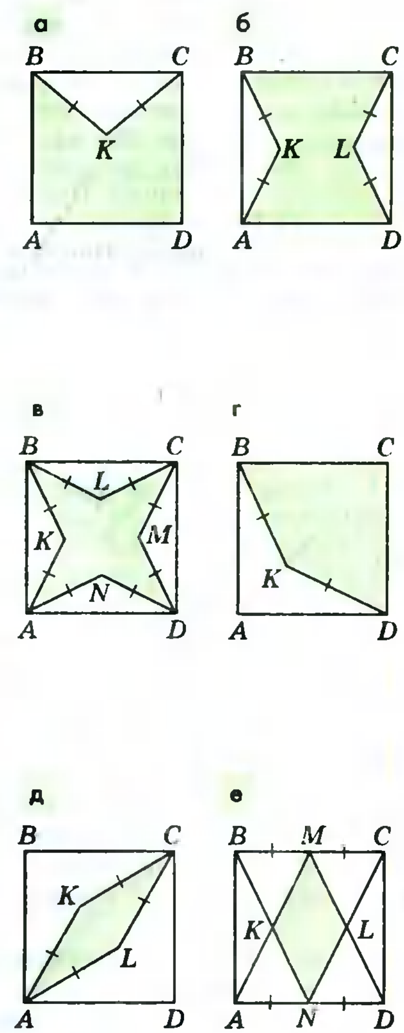


Рис. 181

18.2 **18.9.** Вычислите площадь треугольника, у которого: а) основание 16 см, а высота, проведенная к нему, 12 дм; выразите ее в квадратных сантиметрах; б) основание 1,2 км, а высота, проведенная к нему, равна 230 м; выразите ее в квадратных метрах.

18.10. Квадрат со стороной 3 разделили на 9 равных квадратов *(рис. 180)*. Чему равна площадь треугольника ABC?

18.11. Как найти площади цветных фигур, изображенных на *рисунке 181* ($ABCD$ — квадрат)? Сделайте измерения на рисунке и получите результат. Желательно сделать как можно меньше измерений.

18.12. Запишите формулу площади треугольника. Составьте и решите задачу, аналогичную задаче 18.7.

18.3 **18.13.** Нарисуйте трапецию как результат: а) пересечения угла и полосы; б) пересечения двух трапеций; в) объединения двух треугольников; г) объединения прямоугольника и двух треугольников; д) объединения двух трапеций.

18.14. Докажите, что трапеция, у которой равны углы при основании, равнобедренная.

18.4 **18.15.** Вычислите площадь трапеции, у которой: а) основания 1,2 см и 8 мм, а высота 0,02 м; б) основания 1,5 м и 9 дм, а высота 60 см. Каждую площадь выразите в квадратных сантиметрах.

18.16. Чему равна площадь равнобедренной трапеции, у которой большее основание равно 3, меньшее основание равно 1, а боковая сторона образует с большим основанием угол 45°?

18.17. Основания равнобедренной трапеции равны a и b. Боковая сторона образует с основанием угол 45°. Чему равна ее площадь? (Удобно воспользоваться *рисунком 164, е.)*

18.18. Как разделить на две равновеликие части: а) квадрат; б) прямоугольник; в) трапецию? Предложите разные способы.

18.19. В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$ с вершиной P все ребра равны a. Найдите площадь треугольника PAC.

§ 19 Параллелограмм и его площадь

19.1 **Определение и свойства параллелограмма.** **Параллелограммом** называется четырехугольник, у которого две пары параллельных сторон *(рис. 182, а)*. Параллелограмм можно получить пересечением двух полос *(рис. 182, б)*.

Теорема 12 *(о свойствах параллелограмма).* **1) Противоположные стороны параллелограмма равны. 2) Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.**

• **Доказательство.** 1) Пусть $ABCD$ — параллелограмм *(рис. 183, а)*. Проведем его диагональ AC. Так как отрезки AB и CD параллельны, то накрест лежащие углы 1 и 2 равны. Аналогично так как $BC \parallel AD$, то $\angle 3 = \angle 4$. У треуголь-

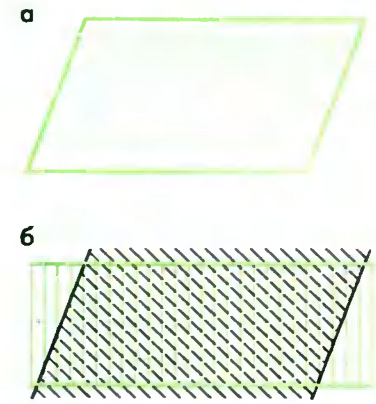


Рис. 182

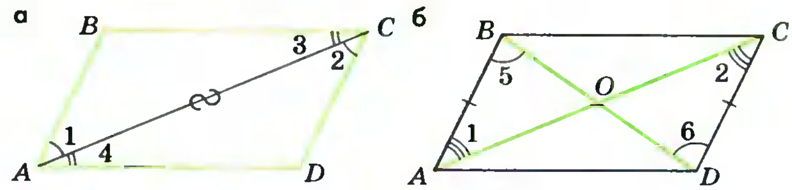


Рис. 183

ников ABC и ACD сторона AC общая, а углы, прилегающие к этой стороне, соответственно равны. Следовательно, $\triangle ABC=\triangle CDA$ (по второму признаку равенства треугольников). А тогда $AB=CD$ и $BC=DA$. Первое свойство доказано.

2) Проведем и вторую диагональ (*рис. 183, б*). Обозначим O точку пересечения диагоналей AC и BD. Треугольники ABO и CDO равны, так как $AB=CD$, $\angle 1=\angle 2$ и $\angle 5=\angle 6$. Поэтому $AO=CO$ и $BO=DO$.

19.2 Признаки параллелограмма

Теорема 13. **Четырехугольник является параллелограммом, если: 1) он имеет две пары равных противоположных сторон; 2) его диагонали, пересекаясь, делятся пополам; 3) две его противоположные стороны равны и параллельны.**

Доказательство. 1) Пусть в четырехугольнике $ABCD$ противоположные стороны равны: $AB=CD$ и $AD=BC$ (*рис. 184, а*). Хотя бы одна диагональ четырехугольника $ABCD$ разбивает его на два треугольника. Пусть это будет диагональ AC. Треугольники ABC и CDA равны, так как $AB=$ $=CD$, $BC=AD$ и сторона AC общая. Следовательно, соответственные углы этих треугольников равны. Поэтому $\angle 3=\angle 4$. Из равенства этих накрест лежащих углов, образованных прямыми BC и AD и секущей AC, вытекает, что $BC \parallel AD$.

Аналогично из равенства углов 1 и 2 вытекает параллельность AB и CD. Итак, $ABCD$ — параллелограмм.

2) Пусть в четырехугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD пересекаются в точке O и делятся ею пополам: $AO=CO$ и $BO=DO$ (*рис. 184, б*). Так как вертикальные углы равны, то $\triangle AOB=\triangle COD$ (по первому признаку равенства треугольников). Следовательно, $AB=CD$. Аналогично $AD=CB$. По первому признаку четырехугольник $ABCD$ — параллелограмм.

3) Пусть в четырехугольнике $ABCD$ стороны AB и CD равны и параллельны: $AB=CD$ и $AB \parallel CD$ (*рис. 184, в*). Проведем диагональ AC и рассмотрим треугольники ABC и CDA. Они равны по первому признаку равенства треугольников. Следовательно, $BC=AD$ и $ABCD$ — параллелограмм (по первому признаку).

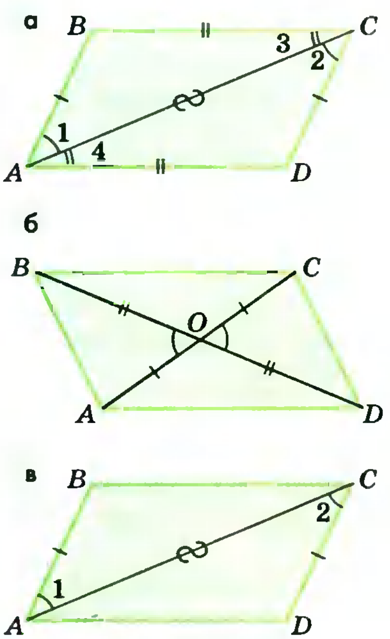


Рис. 184

Замечание. Обратите внимание, что первое свойство параллелограмма и первый признак параллелограмма (а также второе свойство и второй признак) являются взаимно обратными утверждениями.

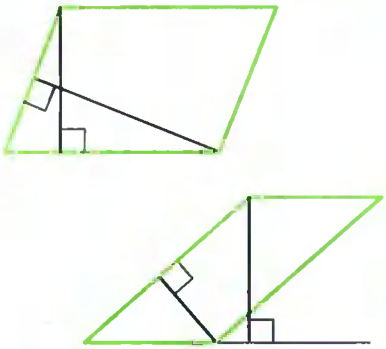


Рис. 185

19.3 Площадь параллелограмма

Высотой параллелограмма называют общий перпендикуляр его противоположных сторон (или содержащих их прямых, *рис. 185*). Высотой называется также длина этого перпендикуляра. У параллелограмма две пары противоположных параллельных сторон и соответственно две высоты.

Теорема 14. Площадь параллелограмма равна произведению его стороны и проведенной к ней высоты.

• **Доказательство.** Проведем диагональ параллелограмма (*рис. 186*). Она разбивает его на два треугольника с равными основаниями a и равными высотами h. Площади этих треугольников равны $\frac{1}{2}ah$. Площадь S параллелограмма равна сумме площадей этих треугольников. Значит,

$$S=\frac{1}{2}ah+\frac{1}{2}ah=ah.$$

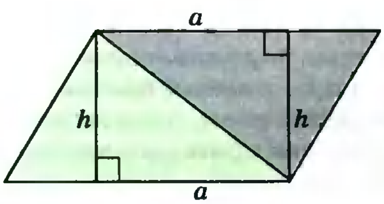


Рис. 186

19.4 Частные виды параллелограмма.

1. **Прямоугольник** можно определить как четырехугольник, все углы которого равны.

• Действительно, сумма всех углов четырехугольника равна 360°. Поэтому если все углы четырехугольника равны, то каждый из них равен 90°. Такой четырехугольник является прямоугольником (*рис. 187, а*).

Прямоугольник, конечно, является параллелограммом: его противоположные стороны параллельны по следствию о параллельности перпендикуляров (п. 13.2). Докажем важное свойство.

Свойство прямоугольника. Диагонали прямоугольника равны (*рис. 187, б*).

• Проведем в прямоугольнике $ABCD$ диагонали AC и BD. Прямоугольные треугольники BAD и CDA равны (по двум катетам). Поэтому равны и гипотенузы: $AC=BD$.

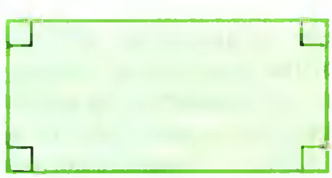
Верно и обратное утверждение.

Признак прямоугольника. Параллелограмм, диагонали которого равны, является прямоугольником.

• **Доказательство.** Пусть в параллелограмме $ABCD$ диагонали равны: $AC=BD$ (*рис. 187, б*). Тогда $\triangle ACD=\triangle DBA$. Следовательно, $\angle D=\angle A$. Аналогично доказывается, что $\angle A=\angle B$ и $\angle B=\angle C$. Поэтому $\angle A=\angle B=\angle C=\angle D=90°$. Итак, $ABCD$ — прямоугольник.

Доказанный признак обосновывает практический способ проверки, о котором мы говорили в самом начале курса (см. п. 1.4): является ли реальный четырехугольник прямоугольником.

а



б

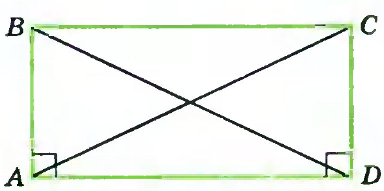
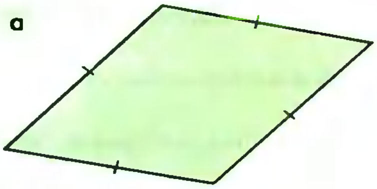


Рис. 187

а



б

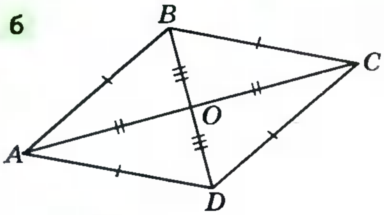


Рис. 188

2. **Ромбом** называется четырехугольник, все стороны которого равны *(рис. 188, а)*.

Ромб является параллелограммом (по первому признаку параллелограмма).

Свойства ромба. Диагонали ромба взаимно перпендикулярны и являются биссектрисами углов ромба *(рис. 188, б)*.

• **Доказательство.** Пусть диагонали AC и BD ромба $ABCD$ пересекаются в точке O. Так как $AO=OC$, то BO — медиана равнобедренного треугольника ABC. Поэтому BO — биссектриса и высота этого треугольника. Следовательно,

$$\angle ABO=\angle CBO \text{ и } BO\perp AC.$$

Докажите самостоятельно следующие два признака ромба:

1. Если диагонали параллелограмма взаимно перпендикулярны, то параллелограмм является ромбом.
2. Если диагональ параллелограмма является биссектрисой его угла, то параллелограмм является ромбом.

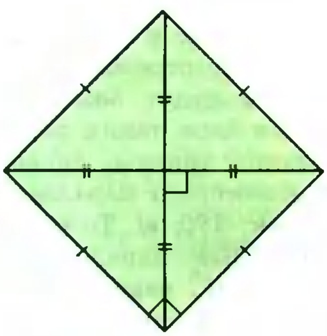


Рис. 189

3. Как вы знаете, у **квадрата** все углы прямые и все стороны равны. Поэтому *квадрат является прямоугольником и ромбом одновременно (рис. 189)*. Следовательно, его диагонали равны (как диагонали прямоугольника) и взаимно перпендикулярны (как диагонали ромба).

19.5 Характерные свойства фигур и определения.

О параллелограмме мы доказали два взаимно обратных утверждения:

1. Противоположные стороны параллелограмма равны.
2. Четырехугольник, противоположные стороны которого равны, является параллелограммом.

Первое из этих утверждений выражает свойство параллелограмма. Второе же является его признаком. О свойстве фигуры, которое одновременно является и ее признаком, говорят как о **характерном** (или **характеристическом) свойстве фигуры.** Таким образом, равенство противоположных сторон четырехугольника — характерное свойство параллелограмма. Точно так же равенство диагоналей параллелограмма — это характерное свойство прямоугольника, а перпендикулярность диагоналей параллелограмма — характерное свойство ромба.

В определении какой-либо фигуры всегда указывают ее характерное свойство. Но одна и та же фигура может иметь несколько характерных свойств. Поэтому возможны различные определения одной и той же фигуры. Например, возможны такие определения прямоугольника:

1. Прямоугольником называется четырехугольник, все углы которого прямые.

2. Прямоугольником называется четырехугольник, все углы которого равны.

3. Прямоугольником называется параллелограмм, диагонали которого равны.

Все эти определения задают одну и ту же фигуру. В этом случае говорят о **равносильности** нескольких возможных определений. Назовите несколько возможных определений известных вам фигур.

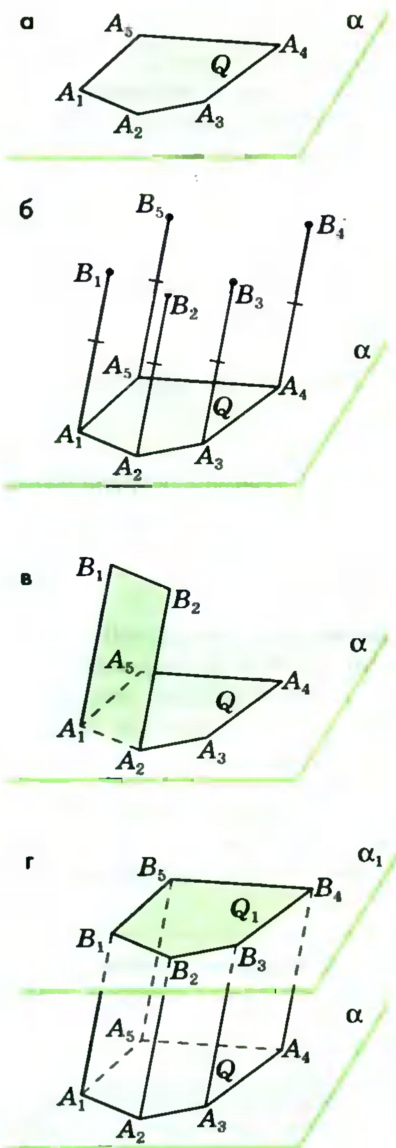


Рис. 190

19.6 **Призмы**. Вы уже знакомы с частным случаем призмы — прямоугольным параллелепипедом. Произвольную призму можно построить так. На некоторой плоскости α построим произвольный многоугольник Q *(рис. 190, а)*. Этот многоугольник станет одним из **оснований** строящейся призмы. Из каждой вершины этого многоугольника в одну сторону от плоскости α проведем параллельные и равные друг другу отрезки *(рис. 190, б)*. Обратите внимание, что такие отрезки изображаются как равные и параллельные друг другу отрезки (или как равные отрезки, лежащие на одной прямой). Эти отрезки будут **боковыми ребрами** строящейся призмы. Каждая пара таких ребер, идущих из соседних вершин основания призмы, является противоположными сторонами некоторого параллелограмма — **боковой грани** призмы *(рис. 190, в)*. Те стороны боковых граней призмы, которые параллельны плоскости α, лежат в одной плоскости α_1, параллельной плоскости α *(рис. 190, г)*. В этой плоскости они ограничивают многоугольник Q_1 — второе основание уже построенной нами призмы.

В том случае, когда основание призмы — n-угольник, призму называют **n-угольной.** Те призмы, у которых боковые ребра перпендикулярны их основаниям, называют **прямыми призмами** *(рис. 191)*. Боковыми гранями прямых призм являются прямоугольники (согласно признаку перпендикулярности прямой и плоскости). Призмы, у которых боковые ребра не перпендикулярны плоскости основания, называют **наклонными призмами.**


Рис. 191

Призма, основание которой — параллелограмм, называется **параллелепипедом** *(рис. 192)*. У параллелепипеда шесть граней, и все они параллелограммы. Каждая грань параллелепипеда может считаться его основанием (аналогично тому, как у тетраэдра каждая грань тоже может считаться его основанием). Прямоугольный параллелепипед — это прямая призма, в основании которой прямоугольник.

Правильной треугольной призмой называют призму, у которой основанием является правильный треугольник. Правильной четырехугольной призмой называют прямую призму, у которой основанием является квадрат. Прямоугольный параллелепипед, одна из граней которого — квадрат, является правильной четырехугольной призмой.

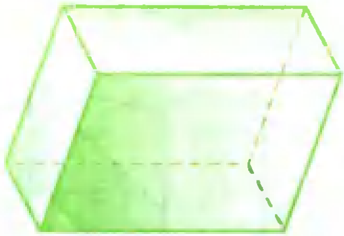


Рис 192

1. Какие вы знаете: а) свойства параллелограмма; б) признаки параллелограмма; в) характерные свойства параллелограмма?
2. Какие определения вы можете дать параллелограмму?
3. Как вычислить площадь параллелограмма?
4. Какие определения вы можете дать: а) прямоугольнику; б) ромбу; в) квадрату?

Задачи к §

19.1. Докажите, что в параллелограмме: а) сумма соседних углов равна 180°; б) противоположные углы равны.

19.2. Докажите, что в прямоугольнике точка пересечения диагоналей равноудалена от вершин.

19.1 **19.3.** Найдите периметр параллелограмма со сторонами: а) 15 см и 26 мм; б) a и b.

19.4. Вычислите все углы параллелограмма, если один из его углов: а) 20°; б) 100°; в) в 2 раза больше другого; г) на 90° больше другого.

19.5. Нарисуйте две параллельные прямые. Нарисуйте отрезок с концами на этих прямых. Нарисуйте еще один такой же отрезок, параллельный первому.
а) Докажите, что эти отрезки равны.
б) Сформулируйте и проверьте обратное утверждение.

19.6. Из двух вершин одной стороны параллелограмма опустили перпендикуляры на прямую, содержащую противоположную сторону. Докажите, что они равны.

19.7. Нарисуйте параллелограмм $ABCD$. Проведите биссектрису угла A.
а) Пусть она пересекает сторону BC в точке K. Докажите, что $\triangle ABK$ равнобедренный.
б) Пусть она пересекает продолжение стороны CD в точке L. Сколько равнобедренных треугольников на этом рисунке?

19.8. Докажите, что в параллелограмме биссектрисы соседних углов перпендикулярны, а биссектрисы противоположных углов параллельны (или лежат на одной прямой).

19.2 **19.9.** Нарисуйте параллелограмм как результат пересечения: а) двух полос; б) двух углов; в) двух треугольников; г) двух параллелограммов.

19.10. Нарисуйте параллелограмм как объединение: а) двух треугольников; б) двух параллелограммов; в) прямоугольника и двух треугольников; г) треугольника и трапеции.

19.11. Точки M и N — середины сторон BC и AD параллелограмма $ABCD$. Докажите, что: а) $MN \parallel AB$; б) $MN = AB$.

19.12. На сторонах AD и BC параллелограмма $ABCD$ отложили равные отрезки AN и BM, а на сторонах AB и CD — равные отрезки AK и DL. Точка O — пересечение отрезков KL и MN.
а) Почему $AKLD$ — параллелограмм?
б) Почему $KBMO$ — параллелограмм?
в) Есть ли еще параллелограммы на этом рисунке? Назовите их.

19.13. Нарисуйте параллелограмм $ABCD$. На его сторонах BC и AD отложите равные отрезки BK и DL. Докажите, что: а) $AKCL$ — параллелограмм; б) $BL \parallel DK$.

19.14. Докажите, что четырехугольник, противоположные углы которого равны, является параллелограммом.

19.15. Восстановите параллелограмм, если на рисунке сохранились такие его элементы: а) две стороны; б) сторона и диагональ; в) диагональ и вершина, не лежащая на ней; г) сторона и точка пересечения диагоналей; д) три вершины;
е) середины трех сторон.

19.3 **19.16.** Вычислите площадь параллелограмма, у которого: а) сторона равна 14 мм, а высота, проведенная к ней, равна 3,2 см; б) сторона равна 1532 мм, а высота, проведенная к ней, равна 0,16 м. Выразите площадь параллелограмма в квадратных сантиметрах.

19.17. Какую часть составляет площадь фигуры S от площади параллелограмма $ABCD$ на *рисунке 193*?

19.18. Запишите формулу площади параллелограмма. Поставьте вопросы, аналогичные вопросам задачи 17.5, и ответьте на них.

19.19. Пусть a и b — длины сторон параллелограмма, h_a и h_b — длины высот, проведенных к ним. Докажите, что $ah_a = bh_b$.

а) Выразите из этой формулы каждую из величин. Запишите ее в виде пропорции и дайте словесную формулировку этой пропорции.

б) Докажите, что если соседние стороны параллелограмма равны, то равны и высоты, проведенные к этим сторонам.

в) Докажите утверждение, обратное предыдущему.

г) Докажите, что бо́льшая высота параллелограмма проводится к меньшей его стороне.

д) Докажите утверждение, обратное предыдущему.

19.20. Запишите формулу площади трапеции. При каких условиях из этой формулы можно получить формулу площади параллелограмма?

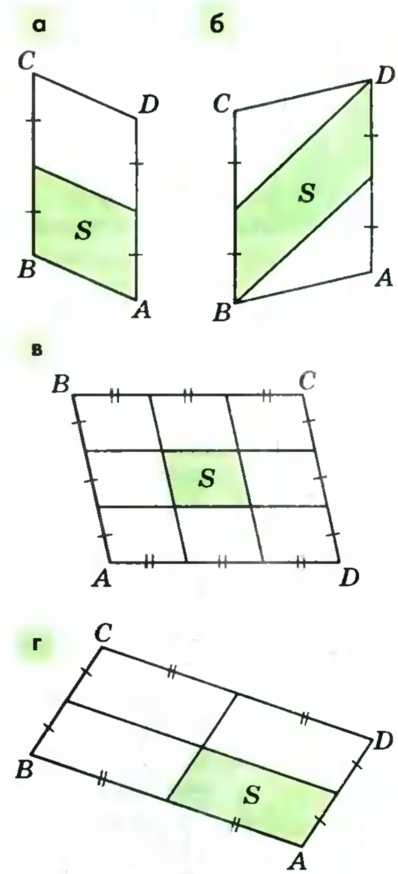


Рис. 193

19.4 **19.21.** Докажите, что параллелограмм, имеющий прямой угол, является прямоугольником.

19.22. Докажите, что: а) хорда прямоугольника, перпендикулярная его стороне, делит его на два прямоугольника; б) хорды прямоугольника, перпендикулярные его соседним сторонам, перпендикулярны между собой.

19.23. Можно ли восстановить прямоугольник, если на рисунке остались такие его элементы: а) сторона и вершина вне ее; б) сторона и точка на противоположной стороне; в) диагональ и точка на другой диагонали; г) отрезок, соединяющий середины противоположных сторон, и точка на соседней к ним стороне; д) точка пересечения диагоналей и две точки на противоположных сторонах?

19.24. Докажите, что ромбом является такой параллелограмм, у которого: а) соседние стороны равны; б) диагональ делит один из углов пополам.

19.25. Докажите, что в ромбе: а) диагонали делят его на четыре равных треугольника; б) высоты, проведенные из одной вершины, равны; в) все хорды, параллельные сторонам, равны.

19.26. Острый угол ромба равен 60°. Докажите, что одна из диагоналей делит его на два равносторонних треугольника.

19.27. Про некоторый четырехугольник Вася сказал, что он ромб, а Федя — что он прямоугольник. Могут ли они оба быть правы?

19.28. Восстановите квадрат, если на рисунке остались: а) сторона; б) диагональ; в) середины двух сторон (рассмотрите два случая); г) центр и две точки на одной из сторон; д) центр и две точки на противоположных сторонах.

19.29. Запишите формулу площади S ромба, если известны длины его диагоналей.

а) Выразите из этой формулы длину диагонали.

б) Пусть одна из диагоналей постоянна, а другая изменяется. Какая зависимость между S и изменяющейся диагональю?

в) Какая зависимость между длинами диагоналей при постоянной площади?

19.30. а) Выразите площадь квадрата через его диагональ. Как называется такая зависимость? Пусть диагональ квадрата увеличивается в 2 раза. Во сколько раз увеличилась его площадь? Подтвердите этот результат рисунком.
б) Нарисуйте квадрат. На его диагонали возьмите точку. Проведите из нее перпендикуляры на две соседние стороны. Где надо взять такую точку, чтобы площадь полученного квадрата было в 2 раза меньше площади исходного?

19.6 **19.31.** Нарисуйте наклонный параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Почему его ребра AA_1 и CC_1 лежат в одной плоскости? Нарисуйте сечение параллелепипеда этой плоскостью.

19.32. а) Докажите, что диагонали AC_1 и A_1C параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ пересекаются и точкой пересечения делятся пополам.
б) Докажите, что все диагонали параллелепипеда проходят через одну точку и делятся ею пополам.

19.33. Сколько плоскостей симметрии имеет: а) правильная треугольная призма; б) правильная четырехугольная призма? Сделайте рисунки.

Задачи к IV главе

IV **1.** Дан квадрат со стороной 1 *(рис. 194)*. Из него вырезается фигура площадью S. Запишите формулу для вычисления площади S, если известна величина x.

IV **2.** В квадрате $ABCD$ провели диагональ AC. Затем от него с угла C отрезали квадрат. а) Докажите, что два четырехугольника, граничащие по части диагонали AC, равновелики. б) Как отрезать квадрат, чтобы осталось $\frac{3}{4}$ площади исходного квадрата?
Составьте и решите аналогичные задачи для прямоугольника.

IV **3.** а) Нарисуйте отрезок AB. Пусть точка X движется по окружности с центром в точке A и радиусом AB. Нарисуйте такие положения точки X, когда угол XAB острый, прямой, тупой. При каком положении точки X площадь треугольника XAB наибольшая?
б) Пусть a и b — две стороны треугольника. Чему равно наибольшее возможное значение его площади?

IV **4.** Как вы будете искать площадь фигур, изображенных на *рисунке 195* и «вырезанных» из квадрата? Желательно сделать как можно меньше измерений. Сделайте измерения на рисунке и получите результат.

IV **5.** Нарисуйте равнобокую трапецию, а в ней диагонали. Докажите, что точка пересечения диагоналей: а) равноудалена от вершин каждого основания; б) лежит на одной прямой с серединами оснований; в) равноудалена от боковых сторон; г) ближе к меньшему основанию, чем к большему.

IV **6.** Какую часть составляет площадь фигуры S на *рисунке 196* от площади параллелограмма?

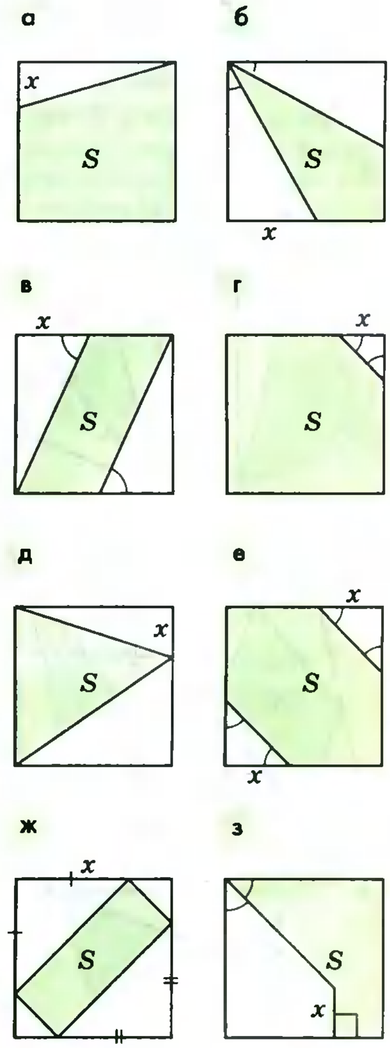


Рис. 194

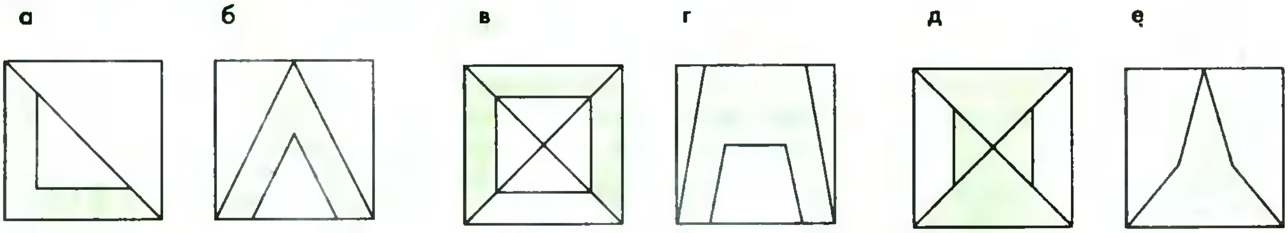


Рис. 195

7. В прямоугольнике $ABCD$ со сторонами a и b провели биссектрисы углов A и D. Они пересеклись в точке M, а сторону BC пересекли в точках K и L. Чему равна площадь треугольника KLM?

8. а) Каким по виду является четырехугольник $ABCD$ на **рисунке 197**?
б) Какие элементы исходных фигур вам нужно знать, чтобы вычислить площадь четырехугольника $ABCD$?

9. Нарисуйте квадрат. Через его вершины проведите прямые параллельно диагоналям. Вершинами какого четырехугольника являются точки их пересечения? Сравните площади этого четырехугольника и данного квадрата.

10. Нарисуйте куб с ребром 1. Нарисуйте ломаную, идущую только по ребрам этого куба, так, чтобы каждое звено ломаной являлось ребром куба и на каждом ребре куба находилось только одно звено ломаной. Нарисуйте самую длинную такую ломаную.

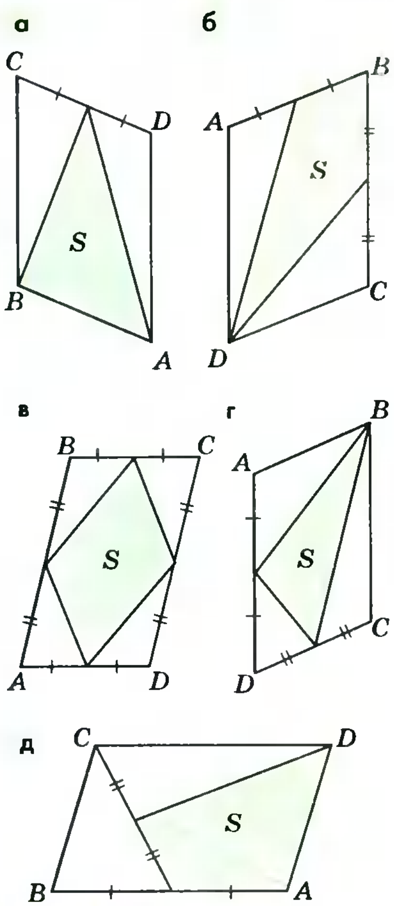


Рис. 196

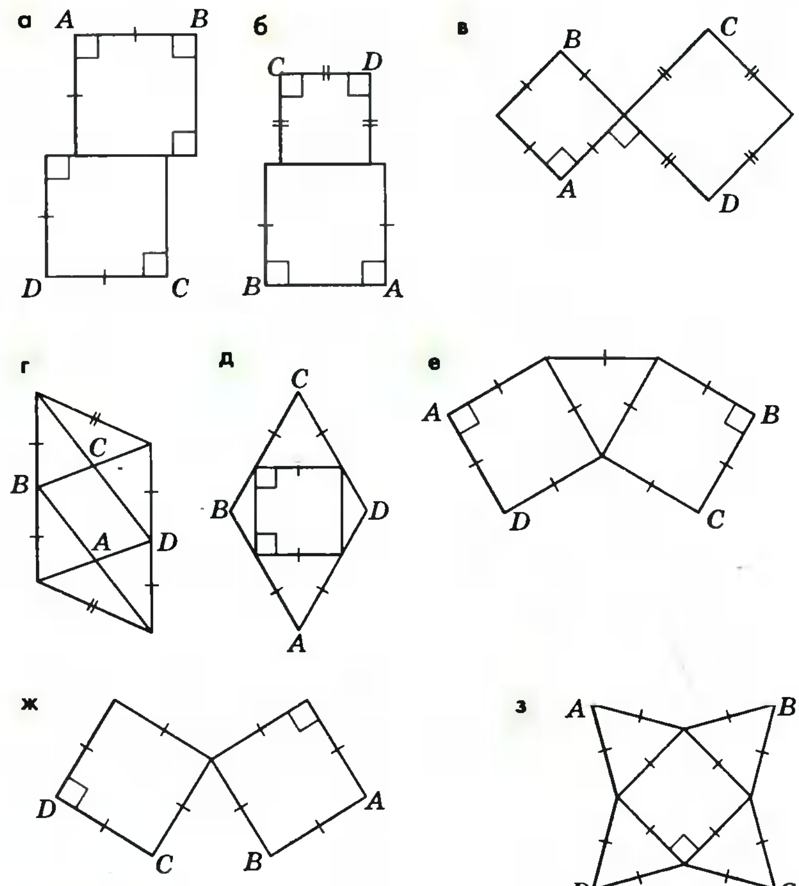


Рис. 197

IV **11.** Куб разделили плоским разрезом на две части. Какие многоугольники (по числу сторон) вы можете увидеть на поверхности полученных частей куба?

IV **12.** Как разбить куб на: а) треугольные пирамиды; б) четырехугольные пирамиды? Постарайтесь найти наименьшее число таких пирамид. Сделайте рисунки.

IV **13.** В правильной четырехугольной пирамиде $PABCD$ все ребра равны.
а) Докажите, что треугольник PAC является прямоугольным.
б) Какие еще прямоугольные треугольники на поверхности этой пирамиды равны треугольнику PAC?

IV **14.** а) Во сколько раз площадь поверхности куба больше площади одной его грани?
б) Как разрезать куб на два прямоугольных параллелепипеда с равными площадями поверхности? Какую часть в этом случае будет составлять площадь поверхности одного из этих параллелепипедов от площади поверхности куба?
в) Прямоугольный параллелепипед разрезали на два прямоугольных параллелепипеда. Сравните площадь поверхности исходного параллелепипеда с суммой площадей поверхностей полученных параллелепипедов. Как зависит изменение суммарной площади от разреза?

IV **15.** Куб разбивают на маленькие кубики, разделяя каждое ребро на одинаковое число равных частей и проводя затем плоскости, перпендикулярные этому ребру. Сравните площадь поверхности исходного куба и сумму площадей поверхностей всех маленьких кубиков, если точек деления на каждом ребре куба взято: а) одна; б) две; в) n.

IV **16.** На грань куба с ребром 2 поставили кубик с ребром 1. Чему равна площадь поверхности полученного многогранника?

IV **17.** Нарисуйте правильную треугольную призму. Укажите на ее поверхности: а) параллельные отрезки; б) скрещивающиеся отрезки; в) отрезок, параллельный плоскости какой-либо грани призмы; г) отрезок, перпендикулярный плоскости какой-либо грани; д) параллельные грани; е) перпендикулярные грани. Нарисуйте на ее поверхности: ж) равнобедренный треугольник; з) равносторонний треугольник; и) прямоугольный треугольник.

V ГЛАВА Метрические соотношения в треугольнике

Продолжим изучение треугольников. Основная цель этой главы — выразить одни элементы треугольника (стороны и углы) через другие его элементы. Пока мы умеем решать лишь одну такую задачу: зная два угла треугольника, мы можем вычислить его третий угол. Но как, например, зная длины двух сторон треугольника и угол между ними, вычислить длину третьей стороны? Такие задачи часто встречаются на практике, например при измерениях на местности.

§ 20 Теорема Пифагора

20.1 Формулировка и история теоремы Пифагора. Начнем с прямоугольных треугольников. Для них выполняется знаменитая теорема Пифагора. Она названа так в честь древнегреческого мыслителя, с которым связывают ее открытие.

Теорема 15 *(теорема Пифагора).* **В прямоугольном треугольнике квадрат гипотенузы равен сумме квадратов катетов.**

Итак, если T — прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c (*рис. 198, а*), то теорема Пифагора утверждает, что

$$c^2=a^2+b^2. \tag{1}$$

Заметим, что a^2, b^2, c^2 — это численные значения площадей квадратов со сторонами a, b, c. Поэтому равенство $c^2=a^2+b^2$ означает, что площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна сумме площадей квадратов, построенных на катетах (*рис. 198, б*).

Пифагор

Пифагор, именем которого названа эта теорема, жил в VI в. до н. э. (ок. 570 — ок. 500 гг. до н. э.). Тогда математика только складывалась у греков в теоретичес-

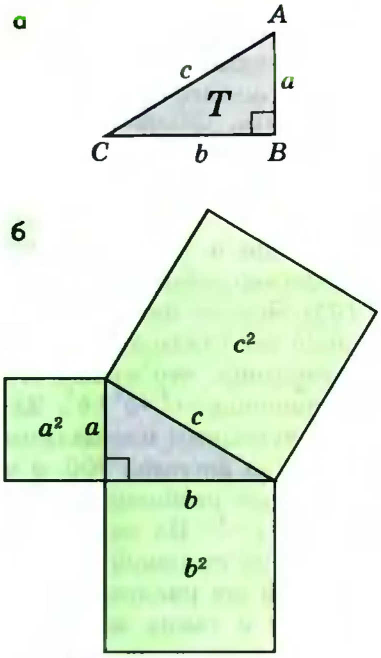


Рис. 198

кую науку, и Пифагор оказал на нее большое влияние. Однако он не открыл теорему, носящую его имя. Она была известна еще раньше в Древнем Египте и Вавилоне, но, возможно, только как факт, выведенный из измерений. Надо думать, Пифагор знал это, но нашел доказательство. И вот факт, взятый из отдельных измерений, выступил как необходимый закон, потому что если уж доказано, то, значит, «оно не может быть иначе». Теорема относилась тогда к площадям квадратов, а не к численным значениям длин. Само название второй степени числа — «a квадрат» или «a в квадрате» — происходит от геометрического понятия «квадрат со стороной a». Сначала была геометрия, алгебра появилась гораздо позже.

20.2 Доказательство теоремы Пифагора. Пусть T — прямоугольный треугольник с катетами a, b и гипотенузой c (рис. 199, а). Докажем, что $c^2=a^2+b^2$.

● Построим квадрат Q со стороной $a+b$ (рис. 199). На сторонах квадрата Q возьмем точки A, B, C, D так, чтобы отрезки AB, BC, CD, DA отсекали от квадрата Q прямоугольные треугольники T_1, T_2, T_3, T_4 с катетами a и b. Четырехугольник $ABCD$ обозначим через P. Покажем, что P — квадрат со стороной c.

Все треугольники T_1, T_2, T_3, T_4 равны треугольнику T (по двум катетам). Поэтому их гипотенузы равны гипотенузе треугольника T, т. е. отрезку c. Докажем, что все углы четырехугольника P прямые.

Обозначим α и β величины острых углов треугольника T. Тогда, как вам известно, $\alpha+\beta=90°$. Угол γ при вершине A четырехугольника P вместе с углами, равными α и β, составляет развернутый угол. Поэтому $\alpha+\beta+\gamma=180°$. И так как $\alpha+\beta=90°$, то $\gamma=90°$.

Точно так же доказывается, что и остальные углы четырехугольника P прямые.

Следовательно, четырехугольник P — квадрат со стороной c.

Квадрат Q со стороной $a+b$ слагается из квадрата P со стороной c и четырех треугольников, равных треугольнику T. Поэтому для их площадей выполняется равенство

$$S(Q)=S(P)+4S(T). \qquad (2)$$

Так как

$$S(Q)=(a+b)^2,\ S(P)=c^2 \text{ и } S(T)=\frac{1}{2}ab,$$

то, подставляя эти выражения в (2), получаем равенство

$$(a+b)^2=c^2+4\cdot\frac{1}{2}ab. \qquad (3)$$

Поскольку $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$, то равенство (3) можно записать так:

$$a^2+b^2+2ab=c^2+2ab. \qquad (4)$$

Из равенства (4) следует, что

$$c^2=a^2+b^2.$$

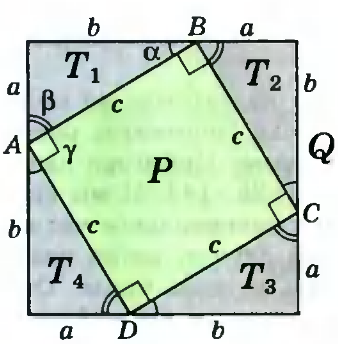


Рис. 199

20.3 ◆ **О значении теоремы Пифагора.** Теорема Пифагора — это одна из главных и, можно даже сказать, самая главная теорема геометрии. Значение ее состоит прежде всего в том, что из нее или с ее помощью можно вывести большинство теорем геометрии. В нашем курсе она будет служить основой многих дальнейших выводов. Поэтому ее нужно твердо усвоить.

Теорема Пифагора замечательна еще и тем, что сама по себе она вовсе не очевидна. Например, свойства равнобедренного треугольника (*рис. 103*) можно видеть непосредственно на чертеже. Но сколько ни гляди на прямоугольный треугольник, никак не увидишь, что между его сторонами есть такое простое соотношение: $c^2=a^2+b^2$. Зато это соотношение между соответствующими площадями становится очевидным из построения на *рисунках 200, а* и *200, б*. На них мы видим два различных разбиения одного и того же квадрата Q со стороной $a+b$. На первом из них квадрат Q слагается из квадрата со стороной c и четырех треугольников. На втором такой же квадрат слагается из квадратов со сторонами a и b и таких же четырех треугольников. Исключив и там, и там треугольники, видим, что $c^2=a^2+b^2$. В этом и состоит самый лучший математический стиль: посредством остроумного построения сделать неочевидное очевидным. В математических трактатах в Древней Индии, доказывая теорему, часто приводили только рисунок. Сопровождали его лишь одним словом: «Смотри!» Запомнить два рисунка нетрудно, а в них вся суть доказательства. ◇

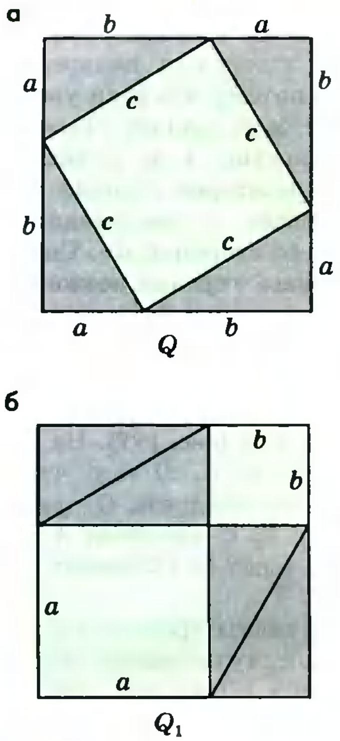


Рис. 200

20.4 **Квадратный корень.** Теорема Пифагора позволяет по любым двум сторонам прямоугольного треугольника найти его третью сторону. Сначала находят квадрат стороны. Например, если катеты прямоугольного треугольника равны 3 и 4 см, то по теореме Пифагора квадрат его гипотенузы равен $3^2+4^2=25$. Поэтому площадь квадрата, построенного на гипотенузе, равна 25 см^2. И чтобы завершить решение задачи, надо найти сторону квадрата, площадь которого равна 25 см^2. Ясно, что она равна 5 см, так как $5^2=25$. Итак, гипотенуза рассматриваемого треугольника равна 5 см. Этот прямоугольный треугольник был известен еще в Древнем Египте (о нем мы уже говорили в начале курса геометрии).

Если известны гипотенуза и один из катетов, то можно найти другой катет. Например, если гипотенуза равна 13 см, а катет равен 5 см, то по теореме Пифагора квадрат другого катета равен $13^2-5^2=169-25=144$. И мы снова приходим к такой задаче: найти положительное число, квадрат которого известен. В данном случае, когда квадрат числа равен 144, легко подобрать нужное число. Оно равно 12. Значит, второй катет треугольника равен 12 см.

В обеих рассмотренных задачах нам пришлось по известному квадрату положительного числа находить само

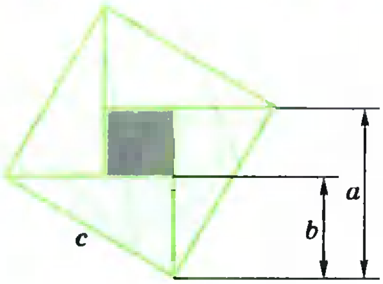


Рис. 201

это число. А именно, зная некоторое число $a>0$, мы находим такое число $b>0$, что $a=b^2$. Найденное положительное число b обозначается так: $b=\sqrt{a}$ — и читается: «b равно корню квадратному из a». Операцию нахождения квадратного корня называют *извлечением квадратного корня*.

Нахождение положительного квадратного корня можно истолковать геометрически как нахождение стороны квадрата, площадь которого известна. Подробно об извлечении квадратного корня говорится в курсе алгебры.

В тех случаях, когда нельзя найти точное значение квадратного корня в виде отношения натуральных чисел (например, для $\sqrt{2}$), мы будем искать его приближенное значение по таблицам или с помощью микрокалькуляторов (например, $\sqrt{2}\approx 1{,}414$), либо оставлять в ответе знак квадратного корня (например, $\sqrt{2}$).

1. Какие вы знаете формулировки теоремы Пифагора?
2. Что вы знаете о Пифагоре?
3. Как вы понимаете такие выражения: «квадрат гипотенузы», «квадрат катета»?
4. Из четырех равных прямоугольных треугольников сложили фигуру (*рис. 201*). Чему равна площадь фигуры и площадь цветной части? Можете ли вы сами доказать теорему Пифагора, глядя на этот рисунок?

Задачи к §20

20.1. Как, зная стороны прямоугольника, найти его диагональ? Используя теорему Пифагора, докажите, что диагонали прямоугольника равны.

20.2. Как вычислить площадь равнобедренного треугольника, у которого известны все стороны? Получите результат для треугольника со сторонами 6, 5, 5. Приведите сами численные примеры. А как вычислить высоту, опущенную на боковую сторону?

20.3. Докажите, что четырехугольник с вершинами в серединах сторон квадрата сам является квадратом.

20.4. На сторонах AB, BC, CD, DA квадрата $ABCD$ выбраны точки A_1, B_1, C_1, D_1 так, что $AA_1=BB_1=CC_1=DD_1$. Найдите площадь четырехугольника $A_1B_1C_1D_1$, если: а) $AA_1=4$, $A_1B=3$; б) $AA_1=A_1B=2$; в) $AA_1=a$, $A_1B=b$.

20.5. Найдите гипотенузу прямоугольного треугольника, если его катеты равны: а) 8 и 6; б) 0,4 и 0,3; в) 1 и 2; г) 5 и 6.

20.6. Найдите катет прямоугольного треугольника, если известны его другой катет и гипотенуза: а) 1,2 и 1,3; б) 1,5 и 2,5.

20.7. Вычислите длину неизвестного отрезка x по *рисунку 202*.

20.8. Вычислите площадь: а) равнобедренного треугольника с основанием 2 и боковой стороной 3; б) равностороннего треугольника со стороной 2; в) равнобедренного прямоугольного треугольника с гипотенузой 1; г) прямоугольного треугольника с гипотенузой 2 и острым углом 30°.

20.9. а) Пусть один из катетов прямоугольного треугольника остается одним и тем же, а другой увеличивается. Что происходит с гипотенузой такого треугольника? Сделайте рисунок.

б) Пусть один из катетов прямоугольного треугольника не меняется, а гипотенуза уменьшается. Что происходит с другим катетом? Сделайте рисунок.

20.10. Нарисуйте прямую a. Возьмите точку A вне ее. Проведите из точки A к прямой a перпендикуляр AB.

а) Возьмите на прямой a две точки C и D так, что $BD > BC$. Объясните, почему $AD > AC$. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

б) Пусть точка X движется по прямой a так, что BX увеличивается. Что происходит с AX?

в) Пусть точка Y движется по прямой так, что AY уменьшается. Что происходит с BY?

20.11. а) Почему при увеличении стороны квадрата увеличивается его диагональ?

б) Нарисуйте прямой угол. Нарисуйте любой отрезок с концами на его сторонах. Нарисуйте еще один отрезок, концы которого дальше от вершины угла, чем концы первого. Почему второй отрезок длиннее первого?

20.12. Как, зная диагонали ромба, найти его сторону? Найдите сторону ромба, если его диагонали равны: а) 6 и 8; б) a и b.

20.13. Как с помощью теоремы Пифагора, зная диагональ квадрата, найти его площадь?

20.14. Основания равнобедренной трапеции равны a и b, а боковая сторона равна c.

а) Найдите высоту трапеции.

б) Найдите диагонали трапеции. Докажите, что они равны.

20.15. Найдите площадь поверхности правильного тетраэдра со стороной: а) 2; б) a.

20.16. Найдите площадь поверхности правильной треугольной призмы, у которой:

а) сторона основания равна 2, а боковое ребро равно 3;

б) сторона основания равна a, а боковое ребро равно b.

20.17. Найдите площадь поверхности правильной треугольной пирамиды, у которой:

а) сторона основания равна 6, а боковое ребро равно 5;

б) сторона основания равна a, а боковое ребро равно b.

20.18. Найдите площадь поверхности правильной четырехугольной пирамиды, у которой:

а) сторона основания равна 6, а боковое ребро равно 5;

б) сторона основания равна a, а боковое ребро равно b.

20.19. Ребра OA, OB и OC тетраэдра $OABC$ взаимно перпендикулярны и равны a. Найдите площадь поверхности тетраэдра.

20.20. Найдите диагональ прямоугольного параллелепипеда, ребра которого равны:

а) 3, 4, 12; б) a, b, c.

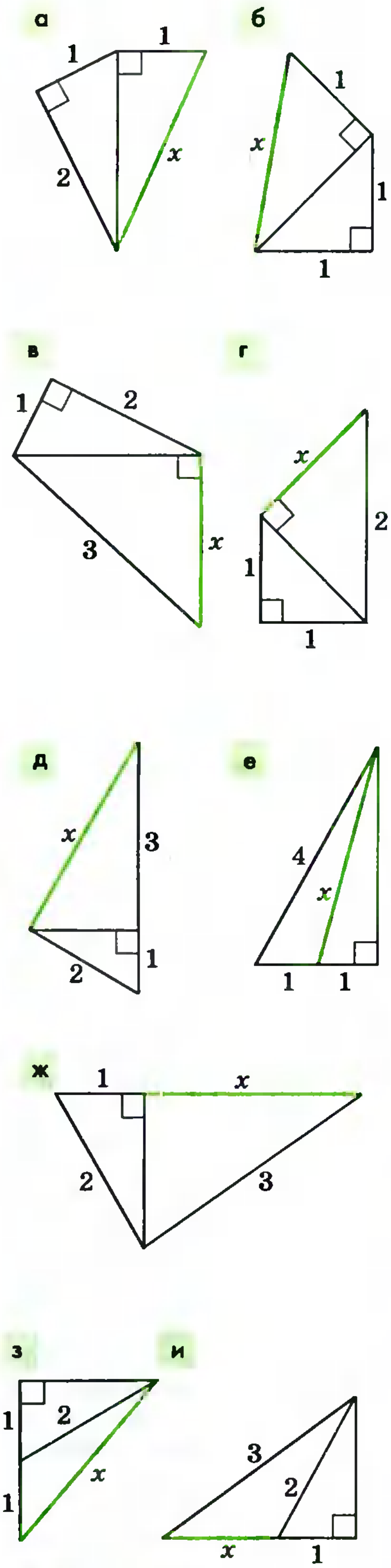


Рис. 202

§ 21 Применения теоремы Пифагора

21.1 Равенство прямоугольных треугольников. Следствием теоремы Пифагора является еще один признак равенства прямоугольных треугольников.

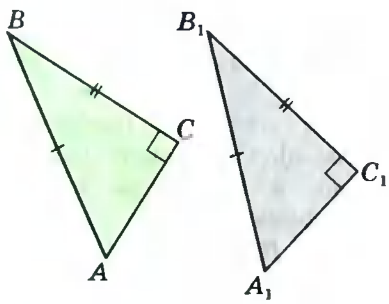


Рис. 203

Признак *(равенства по катету и гипотенузе).* **Если катет и гипотенуза одного прямоугольного треугольника равны катету и гипотенузе другого прямоугольного треугольника, то такие треугольники равны (*рис. 203*).**

Докажем его. Используя теорему Пифагора, в каждом из данных треугольников выразим через гипотенузу и данный катет другой катет. Из условия следует, что они равны. Получим, что эти треугольники равны (по определению).

21.2 Перпендикуляр, наклонная, проекция. Мы переходим к важной задаче о расстоянии между точкой и фигурой. Вот примеры таких задач: расстояние от корабля до берега, от туриста до шоссе и т. п. Простейший пример такой задачи — вычислить расстояние от точки до прямой. Чтобы решить эту задачу, нам понадобятся понятия, указанные в названии пункта.

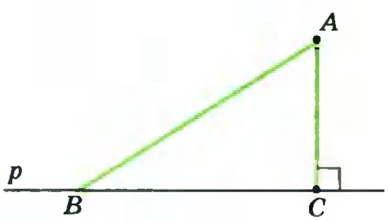


Рис. 204

Пусть p — любая прямая и точка A не лежит на ней (*рис. 204*). Из точки A опустим перпендикуляр AC на p. Точка C называется **проекцией точки A на прямую p**. (Если точка лежит на прямой, то ее проекцией на эту прямую является сама точка.) Возьмем также на прямой p точку B, отличную от точки C, и соединим A с B отрезком AB.

Отрезок AB называется **наклонной**, проведенной из точки A к прямой p, а отрезок CB называется **проекцией наклонной AB** на прямую p. Наклонная, перпендикуляр и проекция наклонной являются гипотенузой и катетами прямоугольного треугольника ABC. По теореме Пифагора

$$AB^2 = AC^2 + CB^2.$$

Поэтому $AB^2 > AC^2$, а значит, $AB > AC$. Аналогично $AB > CB$. Итак, мы доказали такое свойство наклонной:

Если из одной и той же точки проведены к некоторой прямой перпендикуляр и наклонная, то перпендикуляр и проекция наклонной короче наклонной.

Часто эти утверждения формулируют короче: **перпендикуляр и проекция короче наклонной** (подразумевается, что они проведены из одной и той же точки к одной и той же прямой).

21.3 Неравенство треугольника.

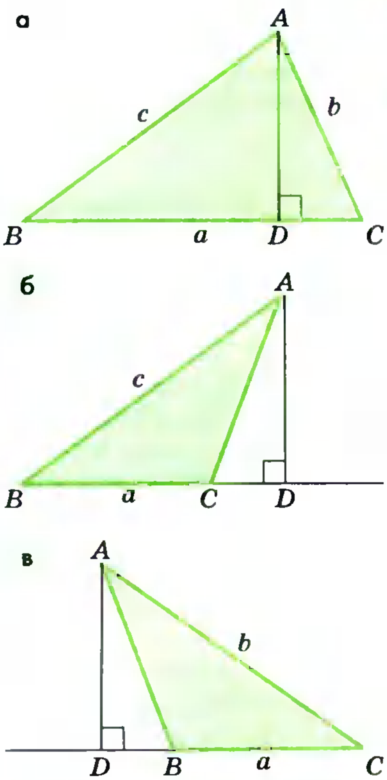


Рис. 205

Теорема 16 **В каждом треугольнике любая сторона меньше суммы двух других его сторон.**

Дано: $\triangle ABC$ со сторонами a, b, c (рис. 205).
Доказать: $a<b+c$ (а также $b<a+c$ и $c<a+b$).

Доказательство. Неравенство докажем лишь для случая, когда сторона a — наибольшая из сторон треугольника ABC.

В других случаях неравенство $a<b+c$ очевидно (почему?).

Проведем высоту AD (рис. 205, а). Она лежит внутри треугольника ABC. Действительно, в противном случае (рис. 205, б, в) оказалось бы, что сторона $a=BC$ не наибольшая (наклонная AB больше проекции BD и тем более больше ее части — отрезка BC, как на **рисунке** 205, б, или $AC>BC$, как на **рисунке** 205, в).

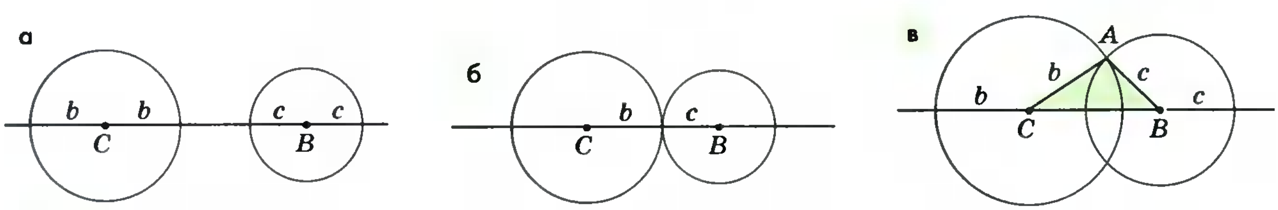
В прямоугольном треугольнике ABD (см. рис. 205, а) катет BD меньше гипотенузы $AB=c$, т. е. $BD<c$. Аналогично в прямоугольном треугольнике ADC катет $DC<b$. Но $BD+DC=BC=a$, а потому

$$a<b+c.$$

Неравенство треугольника дает ответ на такой вопрос: всегда ли можно построить треугольник, сторонами которого будут заданные отрезки a, b, c? Такой треугольник нельзя построить, если один из этих отрезков, например отрезок a, не меньше суммы двух других отрезков: $a \geqslant b+c$ (рис. 206, а, б). Если же наибольший из этих отрезков меньше суммы двух других, то треугольник построить можно (рис. 206, в).

21.4 Расстояние от точки до фигуры.

Расстояние от точки до фигуры. От точки, с которой бьют пенальти, до линии футбольных ворот 11 м (рис. 207). Что это значит? Длина какого отрезка, идущего из этой точки, равна 11 м? Ответ всем ясен: это длина самого короткого отрезка от этой точки до точки на линии ворот.



$BC=a>b+c$ $\quad$ $BC=a=b+c$ $\quad$ $BC=a<b+c$

Рис. 206

Рис. 207

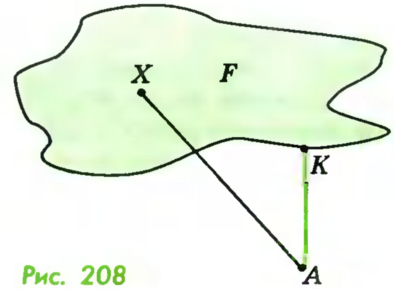


Рис. 208

Так же определяется расстояние от точки A до любой фигуры F. Из всех отрезков AX, где X — точка фигуры F, ищется самый короткий — **кратчайший отрезок** (AK). Его длина и называется **расстоянием от точки A до фигуры F** (рис. 208).

Например, если измеряем расстояние от точки A до прямой p, то таким кратчайшим отрезком является перпендикуляр AC из точки A на прямую p (рис. 209). Поэтому его длина и является расстоянием от A до прямой p.

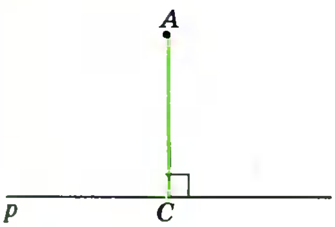


Рис. 209

Расстояние от точки A до фигуры F обозначаем $|AF|$.

Кратчайших отрезков, соединяющих точку A с точками X фигуры F, может быть и больше одного. Например, если F — окружность и точка A — ее центр.

21.5 Характерное свойство биссектрисы угла. Понятие о расстоянии от точки до прямой позволяет по-новому рассмотреть биссектрису угла. А именно справедлива следующая теорема:

Теорема 17 *(о биссектрисе угла).* **1) Каждая точка биссектрисы угла равноудалена от его сторон.** 2) Верно и обратное: **точка угла, равноудаленная от его сторон, лежит на биссектрисе угла.**

1) **Дано** X — точка биссектрисы угла A со сторонами k, l (рис. 210, а).

Доказать: $|Xk|=|Xl|$.

• **Доказательство.** Опустим из точки X перпендикуляры XB и XC на стороны k, l угла A. Так как X — точка биссектрисы угла A, то $\angle XAB=\angle XAC$. Прямоугольные треугольники XAB и XAC равны (по гипотенузе и острому углу). Поэтому $XB=XC$. Но $XB=|Xk|$ и $XC=|Xl|$. Следовательно, $|Xk|=|Xl|$.

2) **Дано:** X — точка угла A и $|Xk|$ и $|Xl|$ (рис. 210, б).

Доказать: луч AX — биссектриса угла A.

• **Доказательство.** Опустим перпендикуляры XB и XC на стороны k, l угла A. Так как $XB=|Xk|$ и $XC=|Xl|$, то $XB=XC$. Прямоугольные треугольники AXB и AXC равны (по гипотенузе и катету). Следовательно, $\angle BAX=\angle CAX$, т. е. луч AX — биссектриса угла A.

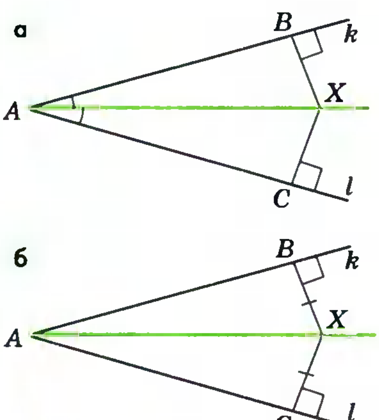


Рис. 210

Теоремы о характерных свойствах фигур часто кратко формулируют, употребляя оборот **«тогда и только тогда»**. Например, доказанную здесь теорему можно сформулировать так: **точка угла лежит на его биссектрисе тогда и только тогда, когда она равноудалена от сторон угла.** Другой пример: **четырехугольник является параллелограммом тогда и только тогда, когда его противоположные стороны равны.** Приведите другие примеры.

21.6 Множество (геометрическое место) точек. Пусть фигура имеет характерное свойство, определяющее, какие точки принадлежат фигуре. Тогда про эту фигуру говорят, что она является **множеством точек, обладающих данным свойством** (или **геометрическим местом точек, обладающих данным свойством**).

Например, **биссектриса угла — это множество точек угла, равноудаленных от сторон угла, или геометрическое место точек, равноудаленных от сторон угла. А серединный перпендикуляр отрезка — это множество точек, равноудаленных от концов этого отрезка.**

Если точка X принадлежит множеству F, то пишут: $X \in F$.

21.7 Перпендикуляр, наклонная и проекция в пространстве. Отрезок, имеющий с плоскостью одну общую точку (конец отрезка), но не перпендикулярный данной плоскости, называется **наклонной к плоскости**.

Пусть из одной точки A, не лежащей в плоскости α, проведены перпендикуляр AB и наклонная AC (*рис. 211, а*). Отрезок BC называется проекцией наклонной AC на плоскость α.

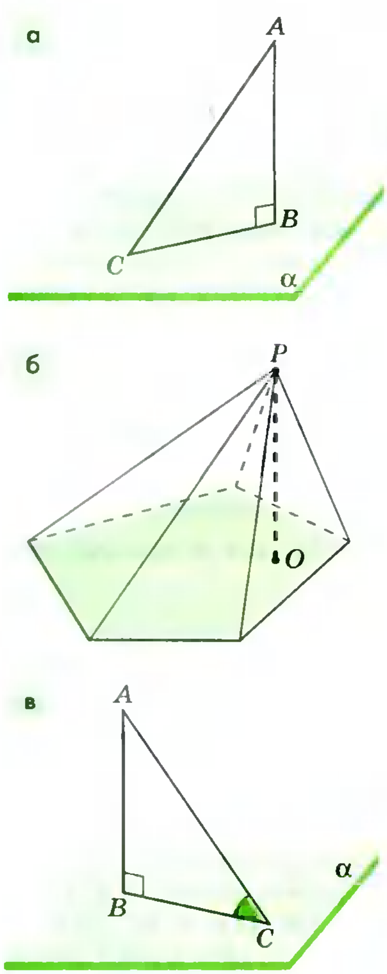


Рис. 211

Перпендикуляр короче наклонной, если они проведены из одной и той же точки к одной и той же плоскости.

• Действительно, в прямоугольном треугольнике ABC катет AB короче гипотенузы AC.

Следовательно, перпендикуляр AB кратчайший из отрезков, соединяющих точку A с точками плоскости α. Поэтому расстояние от точки до плоскости равно длине перпендикуляра, опущенного из этой точки на данную плоскость.

Длиной перпендикуляра, опущенного из самой высокой точки предмета на его основание, измеряют высоту предмета. Так, высотой пирамиды называется длина перпендикуляра, опушенного из вершины пирамиды на плоскость ее основания, а также сам перпендикуляр (на *рисунке 211, б* это отрезок PO).

Углом между наклонной и плоскостью называется величина угла между наклонной и ее проекцией на эту плоскость (*рис. 211, в*). Угол между перпендикуляром к плоскости и этой плоскостью полагается равным 90°.

Теорема *(о трех перпендикулярах).* **Наклонная к плоскости перпендикулярна прямой, лежащей в этой плоскости и проходящей через общую точку наклонной и плоскости, тогда и только тогда, когда проекция наклонной перпендикулярна этой прямой.**

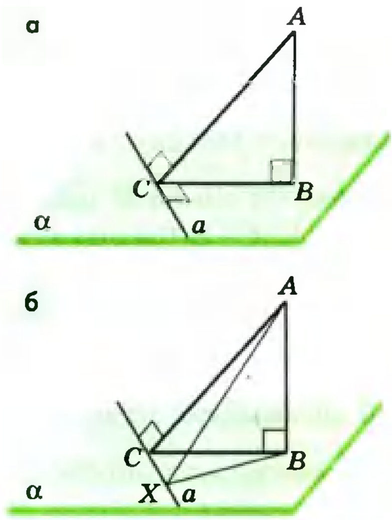


Рис. 212

• **Доказательство.** Пусть AC — наклонная к плоскости α, AB — перпендикуляр к этой плоскости, a — прямая, лежащая в плоскости α и проходящая через точку C (рис. 212, а). В теореме два утверждения: 1) если $AC \perp a$, то $BC \perp a$; 2) если $BC \perp a$, то $AC \perp a$.

Возьмем переменную точку X прямой a (рис. 212, б) и рассмотрим две величины AX^2 и BX^2. Так как $AB \perp \alpha$, то треугольник ABX прямоугольный. Поэтому $AX^2 = AB^2 + BX^2$. Значит две величины AX^2 и BX^2 отличаются на постоянное слагаемое AB^2. Поэтому эти величины свои наименьшие значения принимают одновременно в одной и той же точке. Из этого и следуют оба утверждения теоремы.

1) Пусть $AC \perp a$. Тогда перпендикуляр AC к прямой a короче любой наклонной AX к этой прямой. Значит, и отрезок BC короче любого отрезка BX, когда $X \neq C$. Поэтому $BC \perp a$.

2) Пусть $BC \perp a$. Тогда перпендикуляр BC к прямой a короче любой наклонной BX к этой прямой. Поэтому и $AC < AX$, если $X \neq C$. Следовательно, $AC \perp a$.

1. Какие вы знаете следствия из теоремы Пифагора?
2. Из точки A к прямой a (к плоскости α) проводятся всевозможные наклонные. Есть ли среди них наибольшая? наименьшая?
3. Как найти расстояние от точки до фигуры?
4. Нарисуйте три отрезка, из которых нельзя построить треугольник. Объясните это.
5. Дайте другие определения: а) серединному перпендикуляру; б) биссектрисе угла.

Задачи к § 21

21.1. Нарисуйте две перпендикулярные прямые. Пусть A — точка их пересечения. Возьмите любую точку B, не лежащую на этих прямых. Нарисуйте ее проекции B_1 и B_2 на данные прямые.
а) Докажите, что $AB^2 = AB_1^2 + AB_2^2$.
б) Возьмите еще одну точку C, не лежащую на этих прямых. Нарисуйте ее проекции C_1 и C_2 на данные прямые. Докажите, что $BC^2 = B_1C_1^2 + B_2C_2^2$.

21.2. Из точки A к данной прямой p проведены перпендикуляр AB и две наклонные AC и AD. Докажите, что: а) если $BC = BD$, то $AC = AD$; б) если $AC = AD$; то $BC = BD$; в) если $BC > BD$, то $AC > AD$; г) если $AC > AD$, то $BC > BD$. Дайте различные формулировки этим утверждениям.

21.3. Нарисуйте прямоугольный треугольник ABC с катетами a, b и гипотенузой c. Пусть $h=CD$ — высота этого треугольника, опущенная на гипотенузу, и a_1, b_1 — проекции катетов на гипотенузу. Докажите, что: а) $h^2=a_1b_1$; б) $a^2=ca_1$; в) $b^2=cb_1$.

Решение. Докажем утверждение а).

(1) $c^2=a^2+b^2$ по теореме Пифагора из треугольника ABC.

(2) $a^2=a_1^2+h^2$ по теореме Пифагора из треугольника BCD.

(3) $b^2=b_1^2+h^2$ по теореме Пифагора из треугольника ACD.

В равенство (1) вместо a^2 и b^2 подставим их выражения из формул (2) и (3). Получим:

(4) $c^2=a_1^2+b_1^2+2h^2$.

С другой стороны, $c=a_1+b_1$, а потому

(5) $c^2=a_1^2+b_1^2+2a_1b_1$.

Из формул (4) и (5) имеем $a_1^2+b_1^2+2h^2=a_1^2+b_1^2+2a_1b_1$. Поэтому $2h^2=2a_1b_1$ и окончательно $h^2=a_1b_1$.

Теперь докажем утверждение б). Подставим в выражение (2) вместо h^2 равное ему a_1b_1. Получим $a^2=a_1^2+a_1b_1$. Поэтому $a^2=a_1(a_1+b_1)$. Но $a_1+b_1=c$. Следовательно, $a^2=a_1c$.

Утверждение в) доказывается аналогично.

21.4. Докажите, что точка пересечения двух биссектрис треугольника: а) равноудалена от прямых, на которых лежат стороны треугольника; б) лежит на третьей биссектрисе треугольника. Что из этого следует?

21.5. Докажите, что для любых четырех точек A, B, C, D справедливо неравенство $AD \leqslant AB+BC+CD$.

21.6. Докажите, что каждая сторона треугольника больше разности двух других его сторон.

21.7. Нарисуйте прямую. Какую фигуру образуют все точки, удаленные от этой прямой на данное расстояние?

21.8. Нарисуйте две параллельные прямые. Докажите, что все точки, равноудаленные от этих прямых, образуют прямую.

21.2 **21.9.** Нарисуйте проекцию отрезка AB на прямую a в случае, если: а) AB не имеет с a общих точек; б) AB пересекает a; в) AB пересекает a и $AB \perp a$; г) AB — наклонная к a; д) $AB \parallel a$; е) AB лежит на a.

21.10. Нарисуйте остроугольный треугольник ABC. Нарисуйте проекцию каждой его вершины на прямую, содержащую его противоположную сторону. На этом рисунке укажите проекцию каждой стороны треугольника на эти прямые. Проделайте то же для тупоугольного и прямоугольного треугольника.

21.11. Нарисуйте две взаимно перпендикулярные прямые и любой отрезок a. Нарисуйте его проекции на эти прямые: a_1 и a_2. Пусть длина a равна 1. Докажите, что $a_1^2+a_2^2=1$.

а) Пусть $a_1=0{,}5$. Вычислите a_2. б) Пусть $a_2=0{,}1$. Вычислите a_1.

в) Пусть одна из проекций увеличивается. Что происходит с другой?

21.12. Вычислите длину неизвестного отрезка на *рисунке 213*.

21.13. Нарисуйте окружность с центром O.

а) AB — горизонтальный диаметр. Пусть точка X движется по окружности, начиная от B. Что происходит с проекцией радиуса OX на AB?

б) Нарисуйте вертикальный диаметр. Что происходит с проекцией отрезка OX на него при движении точки X по окружности?

21.14. Нарисуйте две взаимно перпендикулярные прямые a и b, пересекающиеся в точке O. На прямой a выберите точку A, на прямой b — точку B. Постройте отрезок, проекциями которого на a и b являются OA и OB. Сколько таких отрезков получилось? Докажите, что они равны. Чему равны их длины, если: а) $OA=OB=1$; б) $OA=2$, $OB=3$; в) $OA=d_1$, $OB=d_2$?

21.15. Докажите, что в равнобедренном треугольнике равны проекции: а) боковых сторон на основание; б) боковых сторон на прямые, содержащие другие боковые стороны; в) основания на прямые, содержащие боковые стороны; г) высоты к основанию на боковые стороны; д) высот к боковым сторонам на основание; е) высот к боковым сторонам на прямые, содержащие другие боковые стороны.

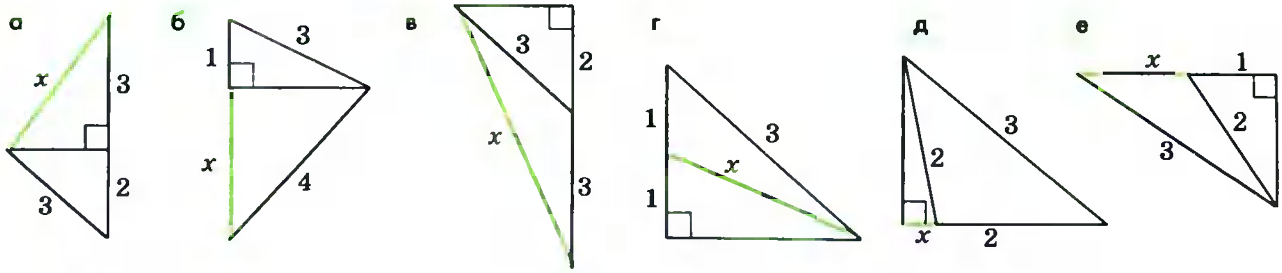


Рис. 213

21.16. Используя результаты задачи 21.3, вычислите длины неизвестных отрезков x, y, z на *рисунке 214*.

21.3 **21.17.** а) Нарисуйте треугольник ABC. Внутри этого треугольника возьмите точку O и проведите отрезки OA, OB, OC. На сделанном рисунке выберите отрезок и треугольник, стороной которого является этот отрезок. Запишите для выбранного отрезка неравенство треугольника.

б) Выполните те же задания для выпуклого четырехугольника $ABCD$, диагонали которого AC и BD пересекаются в точке O.

21.18. В треугольнике две стороны равны 1 и 2. Докажите, что третья сторона x этого треугольника удовлетворяет неравенствам $1 < x < 3$.

21.19. В равнобедренном треугольнике стороны равны 3, 2 и 2. Докажите, что медиана x к боковой стороне удовлетворяет неравенствам $2 < x < 3$.

21.20. Установите, в каких границах лежит длина стороны треугольника, если две другие его стороны равны 2 и 3.

21.21. Отрезки AB и CD пересекаются в точке K. Докажите, что: а) $AK < AC + CK$; б) $KB < KD + DB$; в) $AB < AC + CD + DB$.

21.22. Точка K лежит на стороне BC прямоугольника $ABCD$. Докажите, что: а) $AK < AB + BK$; б) $KD < KC + CD$; в) $AK + KD < AB + BC + CD$.

21.23. Нарисуйте выпуклый четырехугольник $ABCD$.

а) Запишите неравенство треугольника: 1) для стороны AC из треугольника ABC; 2) для стороны AD из треугольника ACD.

б) Докажите, что $AD < AB + BC + CD$. Верно ли это неравенство для невыпуклого четырехугольника? Напишите аналогичные неравенства для других сторон.

21.4 **21.24.** Нарисуйте прямую a и точку X вне ее. По прямой a движется точка Y. В какой-то момент отрезок XY оказался кратчайшим. Докажите, что тогда $XY \perp a$.

21.25. а) Нарисуйте равносторонний треугольник. Пусть его сторона равна 1. Вычислите расстояние от каждой его вершины до прямой, содержащей противоположную ей сторону. Проделайте такую же работу для:

б) равнобедренного треугольника с боковой стороной 3 и основанием 2;

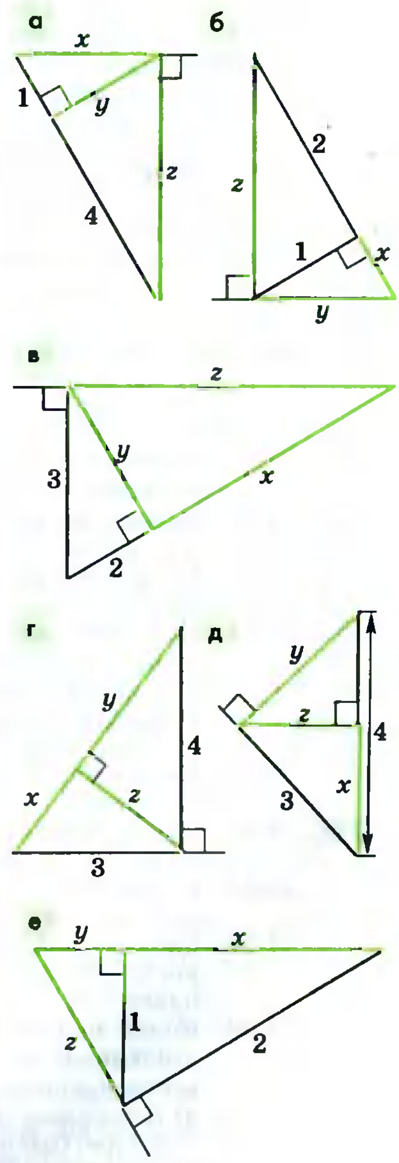


Рис. 214

в) равнобедренного треугольника с боковой стороной 3 и основанием 5;
г) прямоугольного треугольника с катетами 2 и 3;
д) треугольника со сторонами 4, 5, 6. Будет ли в каждом случае найденное вами расстояние расстоянием от вершины до противоположной стороны?

21.26. Нарисуйте две взаимно перпендикулярные прямые a и b, пересекающиеся в точке O. Постройте точку A такую, что $|Aa|=3$ см, $|Bb|=4$ см. Сколько таких точек можно построить? Для каждой из них вычислите длину отрезка OA.

21.27. Нарисуйте прямую a. Отметьте на ней точку O. Постройте точку A такую, что $OA=3$ см, $|Aa|=2$ см. Сколько таких точек можно построить? Ответьте на тот же вопрос, если $|Aa|=3$ см. А если $|Aa|=4$ см?

21.28. Нарисуйте прямую a и прямую b, перпендикулярную прямой a. На прямой b возьмите точки A и B.
а) Пусть $|Aa|=1$, $|Ba|=2$. Вычислите AB.
б) Пусть $|Aa|=1$, $AB=2$. Вычислите $|Ba|$.
в) Пусть $|Aa|=d_1$, $|Ba|=d_2$, $AB=d_3$. Какая зависимость есть между величинами d_1, d_2, d_3? (Рассмотрите различные случаи расположения A, B, a.)

21.29. Нарисуйте прямую a. Точка X движется по плоскости. В каких границах находится $|Xa|$, если: а) $|Aa|=2$, $AX=1$; б) $|Aa|=1$, $AX=2$?

21.5 **21.30.** Пусть взаимно перпендикулярные прямые a и b пересекаются в точке O. На биссектрисе угла O возьмите точку K. Постройте проекции точки K на прямые a и b — точки K_1 и K_2.
а) Пусть $OK=1$. Вычислите $|Ka|$, $|Kb|$ и длины проекций OK на a и b.
б) Пусть $|Ka|=1$. Вычислите OK, $|Kb|$ и длины проекций OK на a и b.
в) Пусть $OK_1=1$. Вычислите OK, $|Ka|$, $|Kb|$ и OK_2. Решите те же задачи, если $\angle AOB$ равен $60°$, $120°$.

21.31. Докажите, что вершина ромба одинаково удалена от его сторон, на которых она не лежит.

21.32. Дан квадрат со стороной 4.
а) Вычислите расстояние от точки пересечения его диагоналей до его сторон.
б) Точка K лежит в квадрате и удалена от одной из его сторон на 1. Вычислите расстояние от нее до параллельной стороны.
в) Точка L лежит в квадрате и удалена от одной стороны на 2, а от другой на 3. Вычислите расстояние от нее до других сторон и до вершин квадрата.

21.6 **21.33.** Нарисуйте прямую a. Нарисуйте фигуру, образованную всеми такими точками X, что: а) $|Xa|\geqslant 1$; б) $|Xa|\leqslant 2$; в) $1\leqslant|Xa|\leqslant 2$.

21.34. Какую фигуру образуют все точки, равноудаленные от двух данных пересекающихся прямых?

21.35. Постройте полосу шириной 3 см и краями a и b.
а) Возьмите точку A в полосе так, что $|Aa|=1$ см. Чему равно $|Ab|$?
б) Возьмите точку A вне полосы так, что $|Aa|=1$ см. Чему равно $|Ab|$?
в) Возьмите точку A так, что $|Aa|=3$ см. Чему равно $|Ab|$?
г) Чему равно $|Ab|$, если $|Aa|=4$ см?

21.36. Как вычислить ширину полосы, если известны расстояния от некоторой точки до краев?

21.7 **21.37.** Пусть точка A не лежит в плоскости α. Сколько перпендикуляров можно провести из точки A к плоскости α?

21.38. Решите задачу, аналогичную задаче 21.2, для перпендикуляра и наклонных, проведенных из одной точки к данной плоскости.

21.39. Сколько равных наклонных можно провести из данной точки на данную плоскость? Какую фигуру образуют концы всех этих наклонных в рассматриваемой плоскости?

21.40. Конец перпендикуляра к плоскости прямоугольника является центром прямоугольника. Докажите, что любая точка этого перпендикуляра равноудалена от вершин прямоугольника. Верно ли обратное утверждение?

21.41. а) Докажите, что все боковые ребра и боковые грани правильной четырехугольной (треугольной) пирамиды равнонаклонены к плоскости ее основания.
б) Сравните угол наклона бокового ребра и угол наклона боковой грани правильной четырехугольной (треугольной) пирамиды к плоскости ее основания.

21.42. Все ребра правильной четырехугольной пирамиды равны a. Найдите высоту этой пирамиды и угол наклона ее бокового ребра к плоскости основания.

21.43. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 6, а ее боковое ребро равно 5. Найдите высоту пирамиды.

21.44. Докажите, что вершина правильной четырехугольной (треугольной) пирамиды равноудалена от сторон ее основания.

21.45. Вычислите высоту правильного тетраэдра с ребром a.

§ 22 Синус

Начиная с этого параграфа и до конца главы мы будем изучать большой и важный раздел геометрии, который называется **тригонометрией.** Главную задачу тригонометрии составляет **решение треугольников.** Решить треугольник — значит вычислить (найти) одни элементы треугольника, зная другие его элементы (например, найти углы треугольника, зная его стороны).

Все основные понятия тригонометрии выражаются через отношение отрезков. С них мы и начнем.

22.1 Отношение отрезков. Сравнивая длины предметов, расстояния и т. п., мы часто говорим об их отношении. Например, длина комнаты в 1,5 раза больше ее ширины. Во всех таких случаях мы имеем дело с отношением отрезков.

Под **отношением** $\frac{a}{b}$ **отрезков** a **и** b понимают отношение их длин при условии, что длины измерены одной и той же единицей длины. Отношение длин двух отрезков не изменяется при замене единицы длины (п. 4.2). Именно поэтому можно говорить просто об отношении этих отрезков.

22.2 Отношение перпендикуляра к наклонной. Начнем с практического примера. Крутизну подъема на ровной наклонной дороге *(рис. 215)* можно задать углом наклона. Но часто удобнее крутизну задать не углом наклона, а высотой подъема, приходящегося на длину пройденного пути. Например, подъем 2 м на 100 м пути. В этом случае крутизна подъема задается отношением высоты к пройденному пути. В рассмотренном примере она равна $\frac{2\text{ м}}{100\text{ м}}=0{,}02$. (Разумеется, можно было бы говорить и о спуске, например, по той же дороге.) Это отношение 0,02 не зависит от пройденного пути. Рассмотренный пример подводит нас к следующей теореме:

Рис. 215

Теорема 18 *(об отношении перпендикуляра к наклонной)* **Пусть из точки B, лежащей на стороне p острого угла A, опущен перпендикуляр BC на сторону q угла A** (рис. 216, а). **Тогда отношение перпендикуляра BC к наклонной BA не зависит от выбора точки B.**

Пояснение. Это значит, что для любой другой точки B_1 (рис. 216, б) стороны p угла A отношение перпендикуляра B_1C_1 к наклонной B_1A будет тем же: $\frac{B_1C_1}{B_1A}=\frac{BC}{BA}$.

• **Доказательство.** На стороне q выберем точку M (рис. 216, в). Выразим площадь S треугольника ABM двумя способами. С одной стороны $S=\frac{1}{2}ma$, где $a=BC$, $m=AM$. С другой стороны $S=\frac{1}{2}ch$, где $h=MD$ — высота треугольника ABM и $c=BA$. Поэтому $ma=ch$. Это равенство можно записать как пропорцию:

$$\frac{a}{c}=\frac{h}{m}. \qquad (1)$$

Если на стороне p взять другую точку B_1 (рис. 216, г) и повторить проведенные рассуждения, то снова получим, что $\frac{a_1}{c_1}=\frac{h}{m}$. Поэтому $\frac{a_1}{c_1}=\frac{a}{c}$.

Отношение перпендикуляра к наклонной не зависит от того, на какую сторону угла опущен перпендикуляр.

Чтобы пояснить это, вернемся к равенству (1). Точку на стороне q угла A, как и раньше, обозначим M, а перпендикуляр из нее — MD. В правой части равенства (1) стоит отношение перпендикуляра MD к наклонной MA. Слева в равенстве (1) стоит отношение, которое с выбором точки M не связано. Значит, и правая часть равенства (1) от выбора M не зависит.

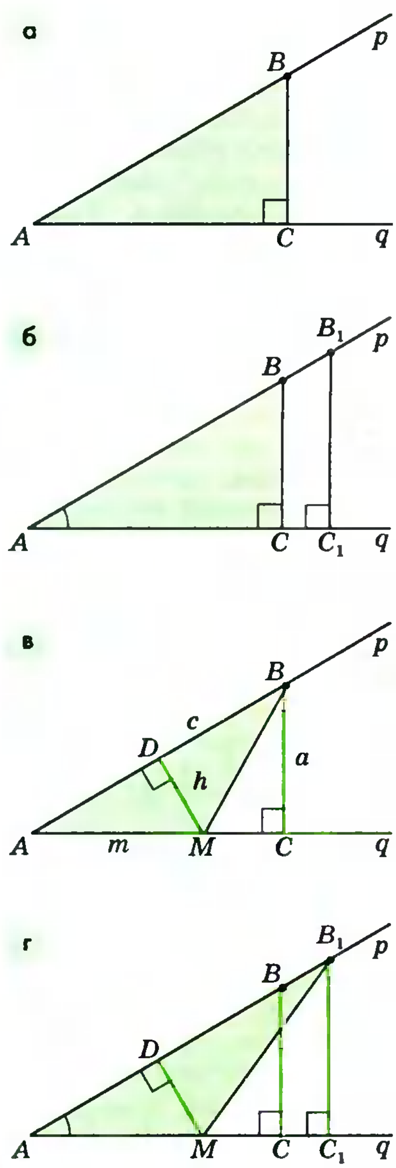


Рис. 216

22.3 Определение синуса. Снова рассмотрим острый угол A. На одной из его сторон возьмем точку B и опустим перпендикуляр BC на другую сторону угла A (рис. 217, а). Мы доказали в п. 22.2, что отношение $\frac{BC}{BA}$ не зависит от положения точки B на сторонах угла A. Поэтому каждому острому углу A можно сопоставить значение этого отношения. Оно называется **синусом угла** A и обозначается $\sin A$:

$$\sin A=\frac{BC}{BA}. \qquad (2)$$

Вспомним практический пример о движении по наклонной дороге, с которого мы начали предыдущий пункт. Представим себе, что одна сторона угла A — это дорога, другая же его сторона горизонтальна. По дороге от A движется точка B. Тогда синус угла A — это отношение высоты подъема BC к пути BA, пройденному точкой B, т. е. крутизна подъема.

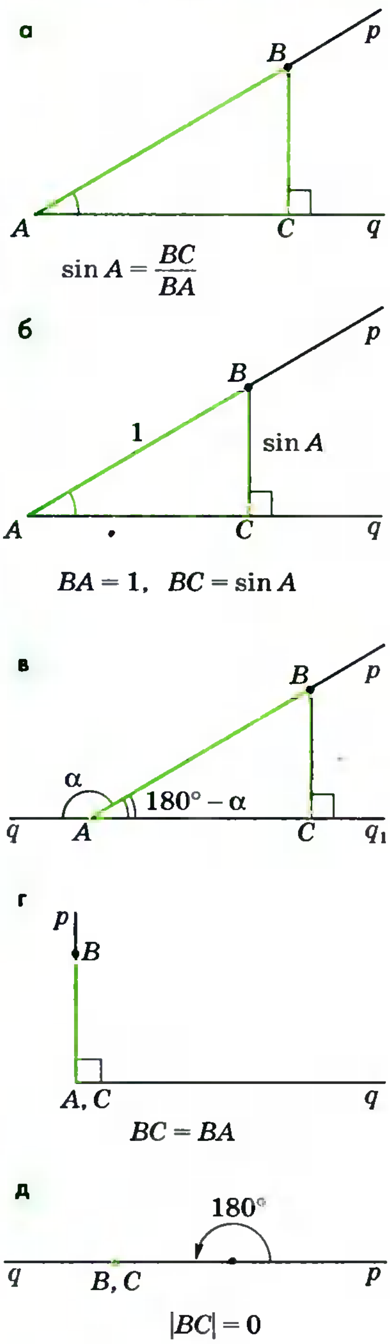


Рис. 217

Для угла с горизонтальной стороной **синус угла — это высота подъема по наклонной стороне угла, приходящаяся на единицу пути** (*рис. 217, б*): если $BA = 1$, то $\sin A = BC$.

Если же из равенства (2) выразить высоту подъема BC, то получим, что

$$BC = (\sin A) \cdot BA. \qquad (3)$$

Это равенство можно истолковать так: высота подъема BC прямо пропорциональна пройденному пути BA. Коэффициентом пропорциональности является крутизна подъема — $\sin A$.

Зная пройденный путь BA и $\sin A$, можно из формулы (3) найти высоту подъема BC.

Определим теперь синус тупого угла A (*рис. 217, в*). Считаем, что прямая q_1, на которой лежит сторона q угла A, горизонтальна. Представим себе, что точка B двигается по стороне p. Крутизна подъема точки B относительно прямой q_1 точно так же задается отношением перпендикуляра BC к наклонной BA. Это отношение, как нам уже известно, будет синусом острого угла BAC, смежного с тупым углом A.

Поэтому для **тупого угла его синус определяется как синус смежного с ним острого угла**. Это вполне естественно. Действительно, перпендикуляр и наклонную из определения синуса острого угла BAC можно отнести и к смежному с ним тупому углу A. При этом лишь надо считать, что перпендикуляр опускается не на сторону угла A, а на ее продолжение.

Итак, синусы смежных углов равны.

Пусть теперь угол A прямой. Тогда высота подъема точки B по одной из сторон угла A относительно другой его стороны всегда равна пройденному пути: $BC = BA$ (*рис. 217, г*). Поэтому отношение $\dfrac{BC}{BA} = 1$, т. е. **синус прямого угла равен 1**.

Наконец, когда угол A развернутый, то высота подъема точки B нулевая (перпендикуляр BC вырождается в точку B, *рис. 217, д*). Поэтому **синус развернутого угла равен нулю**.

Подведем итоги:

1. Синус острого угла равен отношению перпендикуляра к наклонной.

2. Синус тупого угла равен синусу смежного с ним острого угла.

3. Синус прямого угла равен единице.

4. Синус развернутого угла равен нулю.

22.4 **Синус величины угла.** Угол обычно задают его величиной, и надо, например, найти синус угла 50°. Но если взять два таких угла, т. е. два угла по 50°, и, пользуясь определением, найти их синусы, то будут ли равны эти синусы? Докажем, что

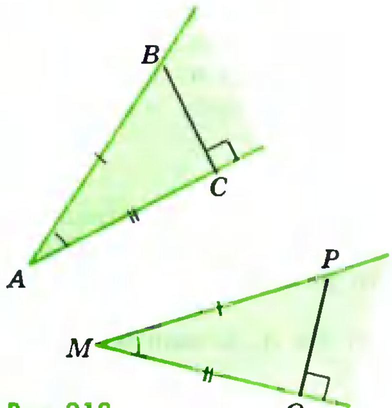


Рис. 218

синусы углов, имеющих равные величины, равны.

Возьмем два равных острых угла: $\angle A$ и $\angle M$ (рис. 218). Из некоторой точки B на стороне угла A опустим перпендикуляр BC на другую сторону угла A. Получим прямоугольный треугольник ABC. Отложим на сторонах угла M отрезки $MP=AB$ и $MQ=AC$. Тогда по первому признаку равенства треугольников $\triangle MPQ=\triangle ABC$. Поэтому $\angle Q=$ $=\angle C=90^\circ$. Итак, PQ — перпендикуляр, опущенный из точки P одной стороны угла A на другую его сторону.

• Докажем, что $\sin M=\sin A$. Во-первых, $\sin M=\frac{PQ}{PM}$. Во-вторых, $\sin A=\frac{BC}{BA}$. Поскольку $PQ=BC$ и $PM=BA$, то $\frac{PQ}{PM}=\frac{BC}{BA}$. Значит, $\sin M=\sin A$.

Итак, **синус однозначно определяется как самим углом, так и его величиной.** Поэтому мы можем говорить не только о синусе угла, но и о **синусе величины угла** и писать, например, $\sin 50^\circ$. Вместо фразы «Синус прямого угла равен единице» мы можем писать теперь короче: $\sin 90^\circ=1$. Аналогично $\sin 180^\circ=0$.

Удобно ввести угол величиной 0°. Таким углом можно считать вырожденный угол, стороны которого совпадают (как стрелки часов в 12 ч). Для этого вырожденного угла полагают $\sin 0^\circ=0$.

Так как синусы смежных углов равны, то для любого угла α от 0° до 180°

$$\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha. \qquad (4)$$

22.5 Синусы острых углов прямоугольного треугольника. В прямоугольном треугольнике ABC (рис. 219, а) с прямым углом C катет $a=BC$ — это перпендикуляр к прямой AC, а гипотенуза $c=AB$ — это наклонная. Из определения синуса $\sin A=\frac{a}{c}$. Аналогично $\sin B=\frac{b}{c}$, где $b=AC$.

Синус острого угла в прямоугольном треугольнике равен отношению противолежащего этому углу катета к гипотенузе.

Используя это, а также теорему Пифагора, мы легко можем вычислить синусы 30°, 45° и 60°.

Рассмотрим равнобедренный прямоугольный треугольник ABC. Его острые углы равны 45° (рис. 219, б). Пусть катеты AC и BC треугольника равны 1. Тогда гипотенуза $AB=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$. Поэтому $\sin 45^\circ=\frac{BC}{BA}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Рассмотрим теперь прямоугольный треугольник ABC, в котором $\angle A=30^\circ$ и $\angle B=60^\circ$ (рис. 219, в). Тогда в этом треугольнике $BC=\frac{1}{2}AB$. (Вспомните, что на два таких треугольника разбивает высота правильный треугольник.) Пусть $AB=2$. Тогда $BC=1$ и $AC=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}$. Поэтому $\sin 30^\circ=\frac{BC}{BA}=\frac{1}{2}$ и $\sin 60^\circ=\frac{AC}{AB}=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

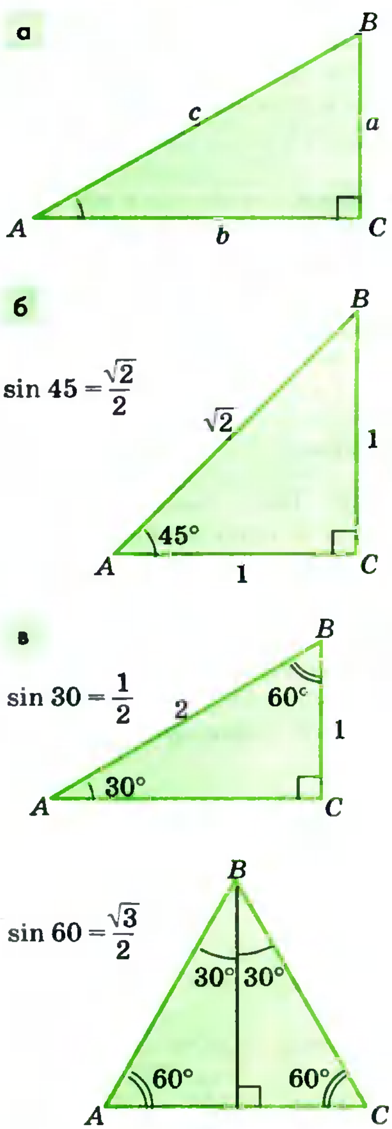


Рис. 219

22.6 Свойства синуса и его график. Рассмотрим, как зависит синус угла от величины угла, когда угол меняется от 0° до 180°. Легко проверить следующие свойства синуса:

1. Синус каждого угла, кроме прямого, меньше единицы.

Это следует из того, что перпендикуляр короче наклонной.

2. Синус острого угла возрастает от 0 до 1 с ростом угла от 0° до 90°.

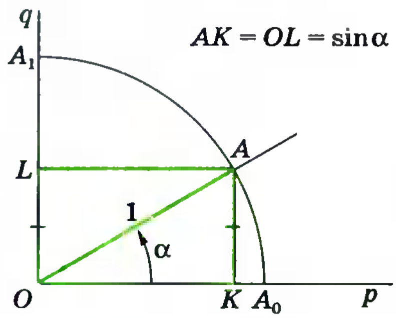


Рис. 220

• Действительно, возьмем прямой угол O со сторонами p и q *(рис. 220)*. Из вершины O внутрь этого угла проведем единичный отрезок OA, образующий с лучом p острый угол α. Из точки A опустим перпендикуляры AK и AL на лучи p и q. Получим прямоугольник $OKAL$. Так как $OA = 1$, то $AK = \sin\alpha$. А поскольку $OL = AK$, то $OL = \sin\alpha$. Итак, $\sin\alpha$ равен длине проекции OL единичного отрезка OA на луч q.

Когда угол α возрастает от 0° до 90°, отрезок OA вращается вокруг точки O от положения OA_0 на луче p до положения OA_1 на луче q. Точка A пробегает четверть окружности. При этом точка L движется от точки O до точки A_1. Длина отрезка OL, т. е. $\sin\alpha$, возрастает от 0 до 1, что и утверждается в свойстве 2.

3. Синус тупого угла убывает от 1 до 0 с ростом угла от 90° до 180°.

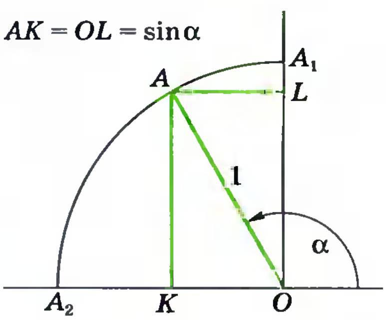


Рис. 221

• Когда тупой угол возрастает от 90° до 180°, смежный ему угол убывает от 90° до 0°. В этом случае по свойству 2 синус такого угла убывает от 1 до 0.

Изменение синуса тупого угла при увеличении угла от 90° до 180° легко увидеть, если проследить за изменением проекции вращающегося единичного радиуса, когда конец радиуса пробегает еще четверть окружности *(рис. 221)*.

Зная синус острого угла, можно найти сам угол. Это вытекает из такого свойства синуса:

4. Величина острого угла определяется синусом этого угла.

Это значит, что для острых углов из равенства $\sin\alpha = \sin\beta$ вытекает равенство $\alpha = \beta$. Докажем это.

• Пусть $\sin\alpha = \sin\beta$. Для углов α и β логически возможны три случая:

а) $\alpha < \beta$. Тогда по свойству 2 имеем $\sin\alpha < \sin\beta$. Значит, этот случай не имеет места.

б) $\alpha > \beta$. Снова по свойству 2 имеем $\sin\alpha > \sin\beta$. И этот случай не имеет места.

Поэтому имеет место третья возможность: в) $\alpha = \beta$.

Аналогично из равенства синусов тупых углов следует равенство самих углов. Если же не известен вид углов, то из равенства синусов равенство углов не следует: углы могут быть смежными. Например, если

$$\sin\,\alpha=\sin\,\beta=\frac{1}{2},$$

то один из этих углов может быть равен 30°, а другой 150°.

Если задана величина острого угла в градусах, то синус этого угла находят по таблицам или с помощью калькулятора. Синус тупого угла находится как синус смежного с ним острого угла. По таблицам же или с помощью калькулятора находят величину острого угла, если известен его синус. Сколь угодно точное вычисление синуса для любых углов осуществляется по формулам высшей математики.

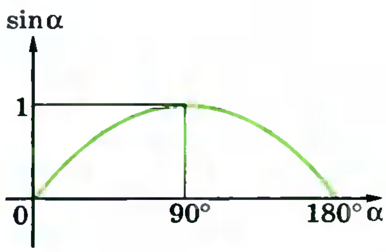


Рис. 222

На *рисунке 222* изображен график синуса: на горизонтальной оси откладывается угол в градусах, на вертикальной — значение его синуса.

На графике хорошо видно, как изменяется синус при изменении угла от 0° до 180°.

1. От чего зависит отношение перпендикуляра к наклонной? Как вы это объясните?

2. Что такое синус острого угла? Как его вычислить? Зависит ли его величина от того, в каких единицах мы проводим измерения?

3. Дайте синусу острого угла несколько разных толкований.

4. Чему равен синус: а) прямого угла; б) угла 180°; в) угла 0°?

5. Как найти синус острого угла в прямоугольном треугольнике?

6. Какие свойства синуса вы знаете?

Задачи к §

22.1 **22.1.** а) Нарисуйте остроугольный треугольник. Через a и b обозначьте две его стороны. Проведите высоты h_a и h_b. Вспомните, как получить равенство $\frac{h_a}{b}=\frac{h_b}{a}$. Сформулируйте этот результат, используя понятия перпендикуляра и наклонной.

б) Выполните задание а) для тупоугольного треугольника, обозначив через b сторону, лежащую против тупого угла.

22.2 **22.2.** Вычислите длину отрезка x на *рисунке 223*.

22.3. Запишите зависимость y от x по *рисунку 224*.

22.3 **22.4.** Запишите выражения для синусов углов, указанных на *рисунке 225*.

22.5. а) Нарисуйте равнобедренный треугольник ABC с вершиной A, а затем его высоту AK. Запишите выражения для синусов углов ABC, ACB, BAK, CAK.

б) Нарисуйте прямоугольник $ABCD$ и его диагональ AC. Запишите выражения для синусов углов CAD, CAB, ACD, ACB.

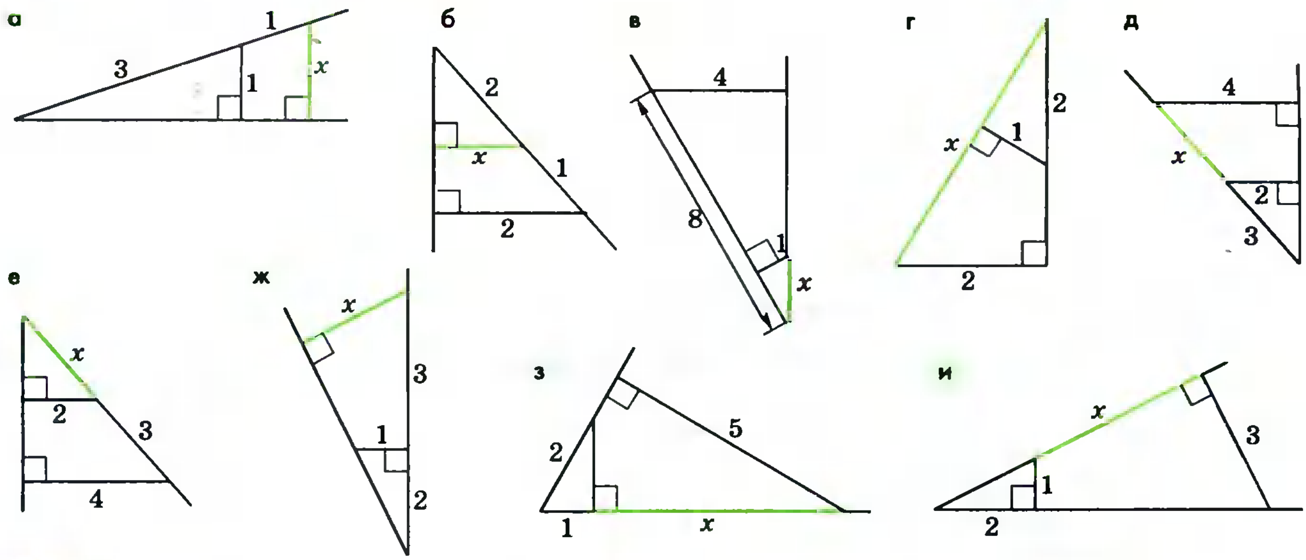


Рис. 223

22.6. Вычислите синусы углов треугольника ABC, если:
а) $AB=3$, $AC=2$, $\angle C=90^\circ$;
б) $AC=1$, $BC=2$, $\angle C=90^\circ$;
в) $AC=3$, $BC=4$, $\angle C=90^\circ$;
г) $AB=AC=3$, $BC=2$;
д) $AB=AC=4$, $BC=6$.

22.7. Вычислите синус острого угла равнобедренной трапеции $ABCD$, если $AB=BC=CD=2$, $AD=4$.

22.5 **22.8.** Для каждого острого угла прямоугольного треугольника (рис. 226) укажите противолежащий катет. Запишите выражение для синуса этого угла.

22.9. В прямоугольном треугольнике проекции катетов на гипотенузу равны 1 и 3. Найдите синусы его углов.

22.10. В прямоугольном треугольнике высота, опущенная на гипотенузу, равна 1, а проекция одного из катетов на гипотенузу равна 2. Вычислите синусы его углов.

22.11. В прямоугольном треугольнике один из катетов равен 2, а его проекция на гипотенузу равна 1. Найдите синусы его углов.

22.12. Вычислите синусы углов, образованных сторонами и диагоналями прямоугольника со сторонами 3 и 4.

22.13. Вычислите синусы углов треугольников со сторонами: а) 2, 3, 4; б) 4, 5, 6, проведя нужные измерения.

22.14. а) Чему равны синусы углов: 120°; 135°; 150°?
б) Срисуйте в тетрадь таблицу и заполните ее:

α	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sin α									

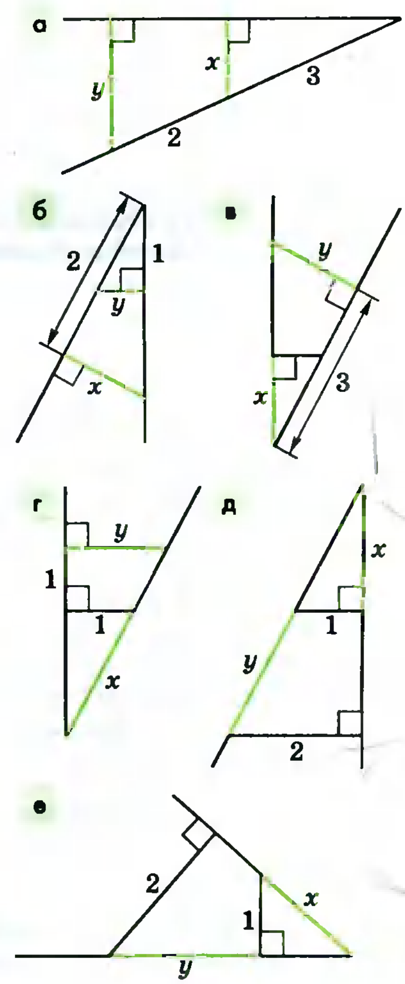
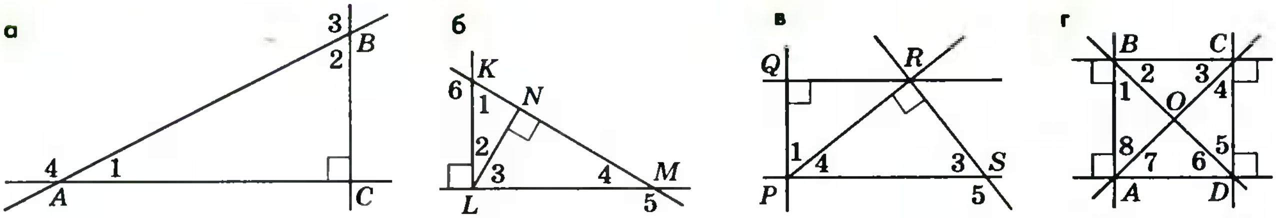


Рис. 224



22.15. Вычислите синусы углов между:
а) высотами и сторонами равностороннего треугольника;
б) двумя высотами равностороннего треугольника;
в) диагоналями и сторонами квадрата.

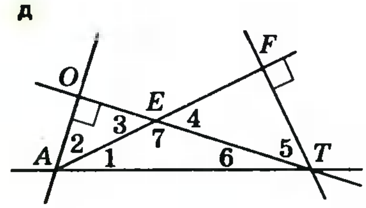


Рис. 225

22.6 22.16. Расположите в порядке возрастания синусы таких углов:
а) 35°, 45°, 40°; б) 135°, 145°, 140°;
в) 35°, 120°, 50°; г) 62°, 115°, 120°.

22.17. Верны ли такие утверждения:
а) если углы не равны, то и синусы их не равны?
б) если синусы углов не равны, то и сами углы не равны?

22.18. Постройте угол, синус которого равен: а) $\frac{1}{3}$; б) $\frac{2}{5}$.

22.19. Какая лестница более крутая:
а) в 20 ступенек, поднимающаяся на 3 м, или в 25 ступенек, поднимающаяся на 2 м;
б) в 20 ступенек, поднимающаяся на 3 м, или в 15 ступенек, поднимающаяся на 2 м?
Ширина ступенек одинаковая.

22.20. Из одной и той же точки A к данной плоскости α проводятся наклонные разной длины.
а) Докажите, что, чем больше наклонная, тем меньший угол она образует с плоскостью α.
б) Сформулируйте и докажите утверждение, обратное предыдущему утверждению.

22.21. Из некоторой точки плоскости α проводятся разные наклонные равной длины.
а) Докажите, что, чем ближе к плоскости другой конец наклонной, тем меньший угол она образует с плоскостью α.
б) Сформулируйте и докажите утверждение, обратное предыдущему утверждению.

22.22. Из вершины A равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) к его плоскости проведен перпендикуляр. Докажите, что из любой точки X этого перпендикуляра, отличной от точки A, отрезок BC виден под меньшим углом, чем из A, и этот угол убывает с возрастанием XA.

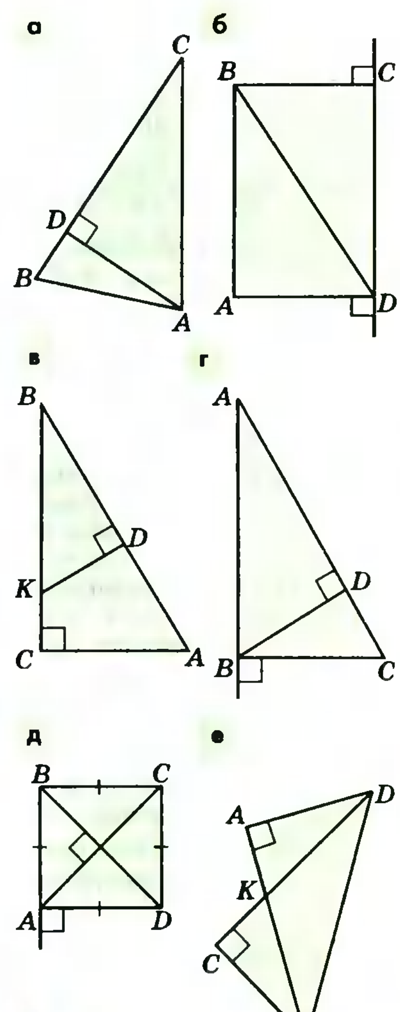


Рис. 226

§ 23 Применения синуса

23.1 Решение прямоугольных треугольников. Зная стороны a, b, c прямоугольного треугольника ABC (см. *рис. 219, а*), мы можем теперь найти его острые углы A и B. Сначала находим один из синусов этих углов, используя равенства

$$\sin A=\frac{a}{c},\ \sin B=\frac{b}{c}. \qquad (1)$$

Затем по найденному синусу находим величину этого угла. Второй угол дополняет найденный до 90°.

Легко решить и обратную **задачу:** по острому углу и одной из сторон прямоугольного треугольника найти остальные его элементы.

Возможны два случая:

Случай 1. Даны гипотенуза c и острый угол A. Тогда $\angle B=90°-\angle A$. Из равенства (1) находим катеты: $a=c\ \sin A$, $b=c\ \sin B$.

Запомните: катеты находят умножением гипотенузы на синус противолежащего угла.

Случай 2. Даны острый угол A и катет a. Тогда $\angle B=90°-\angle A$. Гипотенузу c найдем из формулы $\sin A=\frac{a}{c}$. Тогда $c=\frac{a}{\sin A}$. Катет b можно вычислить по теореме Пифагора: $b=\sqrt{c^2-a^2}$. Но можно и так: $b=c\ \sin B$.

Запомните: гипотенузу находят делением катета на синус противолежащего угла.

23.2 Вычисление площади треугольника. Пусть известны стороны b, c треугольника ABC и угол A между ними (*рис. 227*). Тогда площадь S этого треугольника вычисляется по формуле

$$S=\frac{1}{2}bc\ \sin A. \qquad (2)$$

• Докажем ее. Проведем высоту $h_c=CD$ из вершины C. Тогда $\sin A=\frac{h_c}{b}$. Поэтому $h_c=b\ \sin A$. Подставляем выражение для h_c в формулу площади треугольника $S=\frac{1}{2}ch_c$. Отсюда

$$S=\frac{1}{2}bc\ \sin A.$$

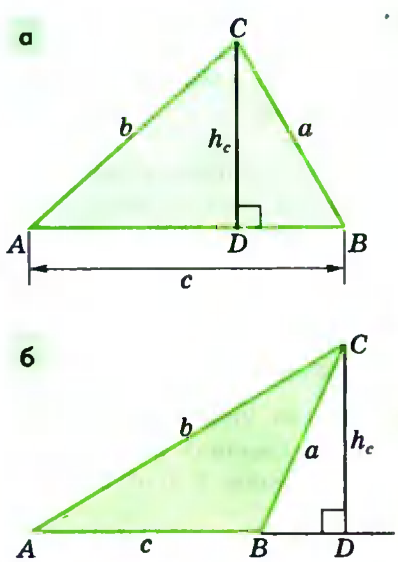


Рис. 227

23.3 Теорема синусов. Теоремой синусов называют следующее важное утверждение:

Теорема 19. **В каждом треугольнике отношение двух сторон равно отношению синусов противолежащих им углов.**

Дано: $\triangle ABC$ (рис. 227).

Доказать: $\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$. (3)

• **Доказательство.** Проведем в треугольнике ABC высоту h_c из вершины C. Согласно определению синуса $\sin A = \frac{h_c}{b}$ и $\sin B = \frac{h_c}{a}$. Поэтому $h_c = b \sin A$ и $h_c = a \sin B$. Следовательно, $b \sin A = a \sin B$. Отсюда

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}.$$

Теорему синусов можно сформулировать и так: **в каждом треугольнике синусы углов пропорциональны противолежащим сторонам,** т. е. для любого треугольника имеют место равенства

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}. \quad (4)$$

• Действительно, так как

$$\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B} \text{ и } \frac{b}{c} = \frac{\sin B}{\sin C},$$

то

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} \text{ и } \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}.$$

Поэтому справедливо равенство (4).

Из теоремы синусов как следствие вытекает признак равнобедренного треугольника, уже доказанный, но более сложно в п. 12.3.

Следствие. **Если в треугольнике два угла равны, то треугольник равнобедренный.**

• **Доказательство.** Из равенства углов A и B следует, что $\sin A = \sin B$. А тогда из равенства (3) вытекает, что $a = b$.

23.4 Решение треугольников по двум углам и стороне.

Теорема синусов позволяет решить такую задачу:

Задача. **Даны сторона и два угла треугольника. Найти две другие стороны и третий угол треугольника.**

Решение. Возможны два случая:

Случай 1. Даны сторона a и два прилежащих к ней угла: $\angle B$ и $\angle C$. Так как сумма углов треугольника равна $180°$, то третий угол A получаем так: $\angle A = 180° - \angle B - \angle C$. Затем, пользуясь теоремой синусов, из равенства $\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\sin B}$ находим сторону b, т. е. $b = a\frac{\sin B}{\sin A}$. Точно так же находим сторону c, т. е. $\frac{a}{c} = \frac{\sin A}{\sin C}$, поэтому $c = a\frac{\sin C}{\sin A}$.

Случай 2. Даны сторона a и два угла: противолежащий угол A и прилежащий угол B. Сначала находим третий угол: $\angle C = 180° - \angle A - \angle B$. Стороны b и c находим, как в случае 1.

Итак, теорема синусов позволяет решить треугольник по двум углам и стороне. В обоих случаях решение единственное.

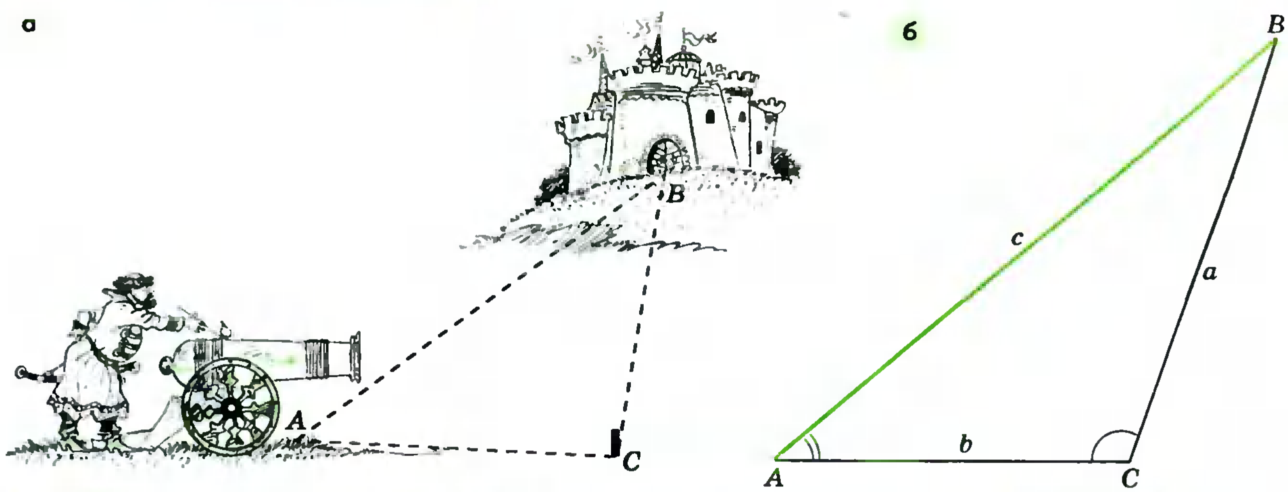


Рис. 228

23.5 **Практические приложения теоремы синусов.** С помощью теоремы синусов решаются важные практические задачи.

Задача 1. **Найти расстояние до недоступного предмета (например, найти расстояние до цели, *рис. 228, а*).**

Решение. Пусть надо определить расстояние от данного пункта A до недоступного пункта B. Берут еще пункт C и измеряют расстояние $AC=b$, а также углы между отрезками AB и AC, CB и CA. Получается геометрическая задача: в треугольнике ABC (*рис. 228, б*) известны сторона AC и прилежащие к ней углы A и C; найти сторону AB. Эта задача решена нами в предыдущем пункте.

Задача 2. **Определить высоту недоступного предмета (*рис. 229, а*).**

Решение. Считаем, что есть возможность перемещаться по горизонтали в направлении к предмету. Выберем два пункта A и B и в каждом из них найдем угол, под которым виден предмет. Получается геометрическая задача: в треугольнике ABC даны сторона AB, $\angle A=\alpha$ и внешний угол β; найти высоту, опущенную из вершины C.

Обозначим искомую высоту CD через h и положим $AB=c$, $BC=a$ (*рис. 229, б*). Из треугольника BCD высота $h=a\sin\beta$. Поэтому надо найти a. По теореме синусов $a=c\dfrac{\sin\alpha}{\sin C}$. Угол β внешний для треугольника ABC. Следовательно, $\beta=\alpha+\angle C$. Отсюда $\angle C=\beta-\alpha$. Теперь мы можем вычислить a, а затем h.

Подумайте, как, используя теорему синусов, решить такую задачу: определить ширину реки, оставаясь на одном ее берегу.

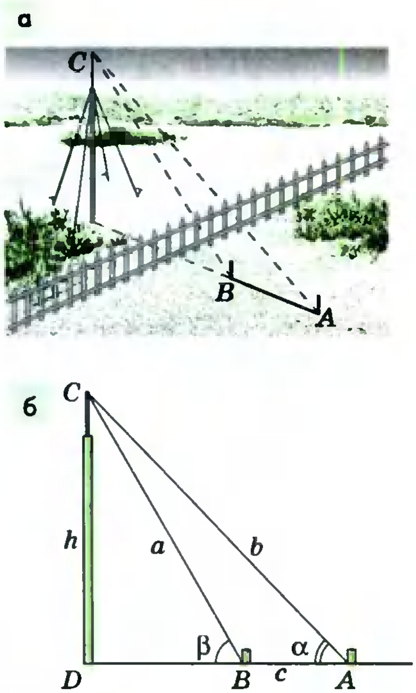


Рис. 229

1. Как в прямоугольном треугольнике с помощью синуса угла можно найти: а) углы; б) гипотенузу; в) катеты?
2. В чем заключается теорема синусов? Запишите несколько разных формулировок теоремы синусов.
3. Какие следствия можно получить из теоремы синусов?

Задачи к § 23

23.1. В равнобедренном треугольнике рассмотрим такие величины: основание a, боковую сторону b, высоту, опущенную на основание h, угол при основании β, угол при вершине α. Как найти неизвестные величины, если известны: а) h и b; б) h и a; в) a и b; г) b и β?
Выберите сами любые две из этих величин и ответьте на тот же вопрос. Приведите численные примеры.

23.2. Решите треугольник по двум сторонам и углу против одной из них.

23.1 **23.3.** а) Постройте прямоугольный треугольник с катетом 1 и гипотенузой 2. Измерьте его острые углы транспортиром. Затем с помощью синуса вычислите эти углы. Совпадают ли с точностью до 1° полученные значения?
б) Постройте прямоугольный треугольник с катетами 1 и 2. Проделайте ту же работу, что и в задаче а).

23.4. Вернитесь к задаче 22.6. Вычислите острые углы рассмотренных там треугольников.

23.5. Вернитесь к задаче 22.2. Вычислите острые углы по ***рисунку 223***.

23.6. Вернитесь к задачам 22.9—22.13. Вычислите острые углы рассмотренных там треугольников.

23.7. Из точки A на прямую a проведены перпендикуляр AC и наклонная AB. Как вычислить угол между наклонной и ее проекцией с помощью синуса, если известны: а) AB и AC; б) BC и AB; в) AC и BC?

23.8. На ***рисунках 225 и 226*** выберите прямоугольный треугольник. Как с помощью синусов указанных углов: а) вычислить катеты, зная гипотенузу; б) вычислить гипотенузу, зная катеты?

23.9. Решите прямоугольный треугольник, если известны следующие его элементы: а) $c=12$, $\angle A=40°$; б) $c=6{,}3$, $\angle A=72°$; в) $a=1$, $\angle B=54°$; г) $a=1$, $\angle A=22°$.

23.10. Угол подъема дороги составляет в среднем 2°. На какую высоту поднимется турист, пройдя по этой дороге 12 км?

23.11. На стороне угла α на расстоянии d от вершины O находится точка A. Чему равно расстояние от нее до прямой, проходящей через другую сторону угла? (Рассмотрите разные случаи.) Составьте и решите обратные задачи.

23.12. Две прямые a и b пересекаются в точке O под углом α. На прямой a находится точка A.
а) $OA=d$. Чему равно $|Ab|$?
б) Точка A переместилась по прямой a на расстояние d_1. На каком расстоянии она находится от прямой b? (Рассмотрите разные случаи.)

23.2 **23.13.** Вычислите площадь: а) равностороннего треугольника со стороной 1; б) прямоугольного равнобедренного треугольника с гипотенузой 1; в) равнобедренного треугольника с боковой стороной 1 и углом при вершине 30°; г) треугольника, две стороны которого равны 2 и 3, а угол между ними 120°.

23.14. Запишите формулу площади треугольника, если известны его стороны d_1 и d_2 и угол α между ними.
а) Выразите из полученной формулы $\sin\alpha$.
б) Пусть $d_1=d_2=d$. Выразите из полученной формулы $\sin\alpha$ и d.
в) Пусть d_1 и d_2 не меняются, а угол α увеличивается. Что происходит с площадью треугольника? При каком значении α его площадь будет наибольшей?

23.15. Вычислите отношение площадей S_1 и S_2 фигур, изображенных на ***рисунке 230***.

23.16. Пусть a и b — длины смежных сторон параллелограмма, а α — угол между ними. Докажите, что площадь S параллелограмма вычисляется по формуле $S=ab\sin\alpha$.
а) Как эта формула выглядит для прямоугольника и для ромба?
б) Как из этой формулы найти угол между сторонами параллелограмма?
в) Пусть длины сторон параллелограмма не меняются, а меняется только угол α. В каких границах лежит площадь параллелограмма?

Рис. 231

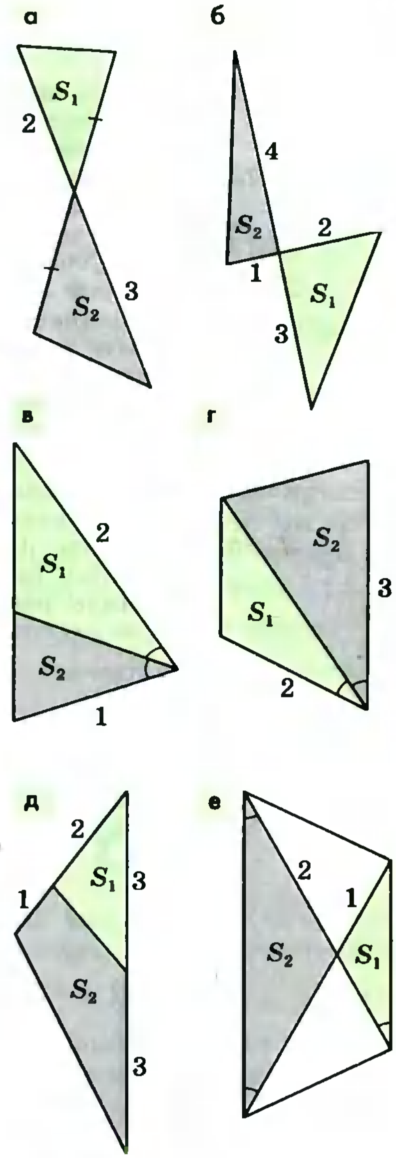


Рис. 230

23.17. а) В треугольнике ABC точка K лежит на стороне AC. Пусть $\angle BKC=\alpha$. Тогда для площади S треугольника ABC справедлива формула $S=\frac{1}{2}AC\cdot BK\sin\alpha$. Докажите.

б) α — угол между диагоналями выпуклого четырехугольника $ABCD$, а S —его площадь. Докажите, что $S=0{,}5\ AC\cdot BD\sin\alpha$.

23.18. Пусть диагональ прямоугольника равна d, а угол между диагоналями равен α. Запишите формулу его площади S, если известны эти величины.

а) Выразите из этой формулы d.

б) Как по этой формуле можно вычислить угол α?

в) Пусть d постоянно, а угол α увеличивается. Как изменяется площадь?

г) В каких границах находится площадь, если d постоянно, а угол α увеличивается от 0° до 90°?

23.19. (Решить перед доказательством теоремы синусов.) Нарисуйте остроугольный треугольник ABC. Из вершины C проведите высоту CD. Выразив CD из треугольников CAD и CBD, докажите, что $a\sin B=b\sin A$. Верно ли это равенство для тупоугольного и для прямоугольного треугольников?

23.20. а) Для треугольника ABC запишите по теореме синусов, чему равны отношения $a:b$, $b:c$, $c:a$, $\sin A:\sin B$, $\sin C:\sin B$, $\sin A:\sin C$.

б) Нарисуйте треугольник PQR и сделайте для него то же, что в задаче а) для треугольника ABC.

23.21. Вычислите отношения сторон $b:a$ и $c:a$ в треугольнике ABC, в котором: а) $\angle A=120°$, $\angle B=30°$; б) $\angle A=90°$, $\angle B=30°$; в) $\angle A=178°$, $\angle B=1°$.

23.22. Спортивный самолет летит по замкнутому треугольному маршруту. Два угла этого треугольника 60° и 100°. Меньшую сторону он пролетел за 1 ч. За сколько времени он пролетит весь маршрут, сохраняя постоянную скорость?

23.23. Три дороги образуют треугольник. Назовем его ABC. При этом $\angle A=20°$, $\angle B=150°$. Автомобилист, находясь в пункте A, хочет попасть в пункт C быстрее. AC и CB — проселки, AB — шоссе. Скорость движения в 2 раза больше по шоссе, чем по проселку. Какой путь ему выбрать?

23.24. В 12.00 нарушитель свернул с основной магистрали и помчался по шоссе (рис. 231) со скоростью 140 км/ч. В 12.00 инспектор ГИБДД помчался по проселку со скоростью 70 км/ч наперерез нарушителю. Успеет ли инспектор остановить нарушителя у перекрестка шоссе и проселка?

23.25. Вычислите неизвестные элементы треугольника ABC, в котором: а) $a=10$, $\angle A=45°$, $\angle B=65°$; б) $c=2$, $\angle A=10°$, $\angle B=100°$; в) $b=10$, $a=20$, $\angle A=30°$.

23.26. Решите треугольник ABC, в котором: а) $\angle B=10^\circ$, $c=10$, $b=3$, угол C тупой; б) те же значения $\angle B$, c, b, что и в случае а), но угол C острый; в) $\angle B=10^\circ$, $c=3$, $b=10$.

23.27. Угол при вершине равнобедренного треугольника равен 120°. а) Пусть его боковая сторона равна 1. Вычислите основание. б) Пусть его основание равно 1. Вычислите боковую сторону.

23.5 **23.28.** Из вершины триангуляционного пункта хотят измерить ширину реки. Высота пункта известна. Как это сделать?

23.29. Участок земли имеет форму выпуклого многоугольника. Как с помощью теоремы синусов вычислить его площадь?

23.30. Вы стоите перед домом. Объясните, почему вы не можете видеть этажи этого дома одинаково хорошо, т. е. под равными углами?

23.31. Найдите угол наклона диагонали куба к его граням.

23.32. Найдите углы наклона диагонали прямоугольного параллелепипеда к его граням, если ребра параллелепипеда равны 3, 4, 6.

23.33. Найдите углы наклона ребер правильного тетраэдра к плоскостям его граней.

23.34. Найдите угол между гранями правильного тетраэдра.

23.35. Найдите углы наклона боковых граней к плоскости основания правильной четырехугольной пирамиды, все ребра которой равны a.

23.36. Вычислите площадь поверхности правильной четырехугольной (треугольной) пирамиды, боковое ребро которой равно a, а угол боковой грани при вершине пирамиды равен φ.

§ 24 Косинус

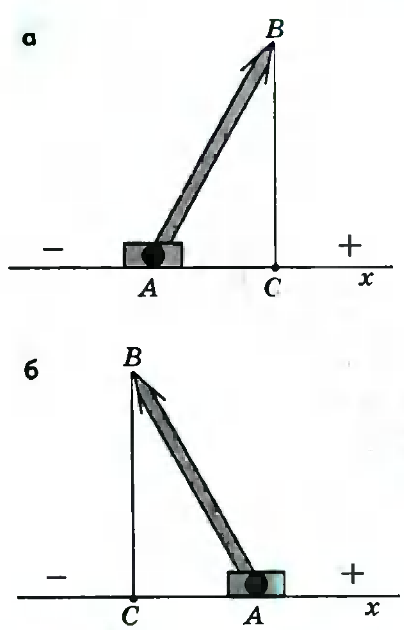


Рис. 232

24.1 Определение косинуса. С помощью синуса вы научились решать многие важные задачи. Однако у синуса есть существенный недостаток: он не определяет угол. Если, например, $\sin\alpha=0{,}5$, то $\alpha=30^\circ$ или $\alpha=150^\circ$. Поэтому мы не можем однозначно по синусу найти угол. Угол находится однозначно с помощью другой функции — косинуса угла, изучение которой мы начинаем.

Начнем с примера. Рассмотрим маятник, скажем, метроном AB (рис. 232). Он совершает колебательное движение, отклоняясь от вертикали в разные стороны. Этому отклонению соответствует длина проекции AC маятника AB на горизонтальную прямую x. Но длина AC не определяет однозначно положение маятника. Мало знать длину проекции AC, надо знать еще, на каком луче прямой x лежит AC. Поэтому прямую x делают числовой осью с началом в точке A. Если проекция AC лежит справа от A, то ей приписывают знак «плюс», а если слева от A, то знак «минус». Проекция AC, взятая со знаком, уже однозначно определит положение маятника AB, т. е. угол α, который образует маятник с осью x.

Длину AB, длину проекции AC, взятую со знаком, и угол α и связывает функция угла, называемая косинусом угла.

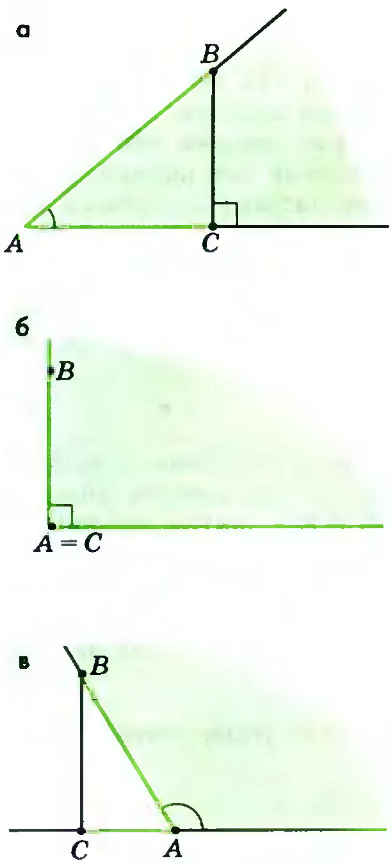


Рис. 233

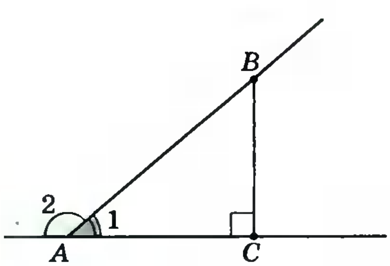


Рис. 234

Перейдем к определению. Пусть на одной стороне угла A взят отрезок AB и AC — проекция отрезка AB на другую сторону угла A или ее продолжение (рис. 233). Тогда **косинусом угла** A называется число, которое обозначается $\cos A$ и определяется следующими равенствами:

$$\cos A = \begin{cases} \dfrac{AC}{AB}, \text{ когда } \angle A \text{ острый (рис. 233, а);} \\ \dfrac{-AC}{AB}, \text{ когда } \angle A \text{ тупой или развернутый (рис. 233, в);} \\ \text{нулю, когда } \angle A \text{ прямой (рис. 233, б).} \end{cases}$$

(Если $\angle A$ прямой, то длина AC равна нулю. Именно поэтому $\cos A = 0$.)

Из данного определения следует, что косинусы смежных углов противоположны (в то время как синусы смежных углов равны).

• Докажем это. Рассмотрим два смежных (не прямых) угла с общей вершиной A и общей стороной AB (рис. 234). Опустим перпендикуляр BC на другую сторону острого угла A. Тогда по определению косинус острого угла 1 равен $\frac{AC}{AB}$, а косинус смежного с ним тупого угла 2 равен $-\frac{AC}{AB}$. Следовательно, эти косинусы отличаются только знаком, т. е. противоложны.

Если же смежные углы прямые, то их косинусы равны нулю и утверждение тоже справедливо.

Наконец отметим, что для развернутого угла A проекция $AC = AB$. Поэтому согласно определению косинуса $\cos\ A = -1$.

24.2 **Основное тригонометрическое тождество.** Для любого угла A его синус и косинус связаны важным равенством

$$\sin^2 A + \cos^2 A = 1. \qquad (1)$$

Его называют основным тригонометрическим тождеством. Оно вытекает из теоремы Пифагора (а для прямоугольного треугольника с единичной гипотенузой это и есть теорема Пифагора).

• Докажем равенство (1). Пусть A — острый угол и BC — перпендикуляр, опущенный из точки B одной стороны угла A на другую его сторону (рис. 235, а). Тогда $\sin A = \frac{BC}{AB}$ и $\cos A = \frac{AC}{AB}$.

По теореме Пифагора $AB^2 = AC^2 + BC^2$. Поэтому

$$(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 + \left(\frac{AC}{AB}\right)^2 = \frac{BC^2 + AC^2}{AB^2} = \frac{AB^2}{AB^2} = 1.$$

Равенство (1) доказано для острых углов. Если угол A прямой, то $\sin A = 1$, $\cos A = 0$ и равенство (1) тоже справедливо.

Пусть A — тупой угол и BC — перпендикуляр, опущенный из точки B одной стороны угла A на продолжение другой его стороны (рис. 235, б).

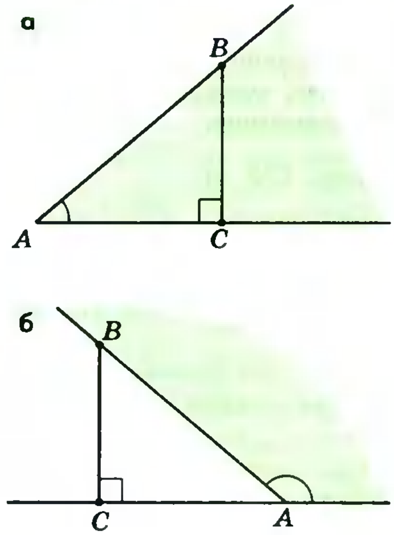


Рис. 235

Тогда $\sin A = \frac{BC}{AB}$, $\cos A = -\frac{AC}{AB}$ и $AC^2 + BC^2 = AB^2$.

Поэтому снова

$$(\sin A)^2 + (\cos A)^2 = \left(\frac{BC}{AB}\right)^2 + \left(-\frac{AC}{AB}\right)^2 = \frac{BC^2 + AC^2}{AB^2} = \frac{AB^2}{AB^2} = 1.$$

Итак, равенство (1) установлено для любых углов.

Используя равенство (1), можем показать теперь, что **косинус, как и синус, зависит только от величины угла.**

Действительно, если угол A острый или прямой, то косинус неотрицателен. Тогда из равенства (1) получаем, что

$$\cos A = \sqrt{1 - \sin^2 A} \qquad (2)$$

Если же угол A тупой или развернутый, то косинус его отрицателен. Тогда, снова используя равенство (1), имеем, что

$$\cos A = -\sqrt{1 - \sin^2 A}. \qquad (3)$$

Поскольку $\sin A$ зависит лишь от величины угла A, то из (2) и (3) следует, что и $\cos A$ тоже зависит лишь от величины угла A. Поэтому, как и для синуса, мы пишем, например, $\cos 50°$, $\cos \alpha$, где α — величина угла A. Так, $\cos 90° = 0$, $\cos 180° = -1$. Кроме того, полагаем $\cos 0° = 1$. Это согласуется с данным определением для косинуса острого угла: в этом вырожденном случае $AC = AB$, и потому $\cos 0° = \frac{AB}{AB} = 1$.

Зависимость косинусов смежных углов теперь можно выразить так:

$$\cos (180° - \alpha) = -\cos \alpha. \qquad (4)$$

24.3 Косинус острого угла прямоугольного треугольника. Рассмотрим прямоугольный треугольник ABC с катетами $BC = a$, $AC = b$ и гипотенузой $AB = c$ (рис. 236). Запишем косинусы острых углов треугольника ABC. Так как катет AC — проекция гипотенузы AB, то по определению косинуса острого угла $\cos A = \frac{AC}{AB}$, или, короче,

$$\cos A = \frac{b}{c}. \qquad (5)$$

Аналогично

$$\cos B = \frac{a}{c}. \qquad (6)$$

Косинус острого угла прямоугольного треугольника равен отношению катета, прилежащего к этому углу, к гипотенузе. Короче: косинус равен отношению прилежащего катета к гипотенузе.

Из равенств (5) и (6) следует, что

$$b = c \cos A \qquad (7)$$

и

$$a = c \cos B. \qquad (8)$$

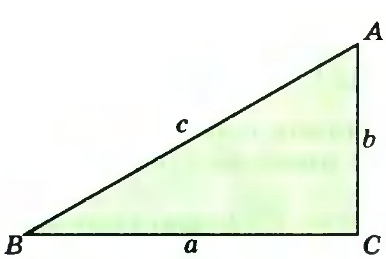


Рис. 236

Поэтому, чтобы найти катет с помощью косинуса, надо умножить гипотенузу на косинус прилежащего к этому катету острого угла. А как с помощью косинуса найти гипотенузу?

Теперь вспомним, что

$$\frac{a}{c}=\sin A \qquad (9)$$

и

$$\frac{b}{c}=\sin B. \qquad (10)$$

Сопоставив (6) и (9), получим, что

$$\sin A=\cos B. \qquad (11)$$

Аналогично из (5) и (10) следует, что

$$\cos A=\sin B. \qquad (12)$$

Но, как вам известно, $\angle A+\angle B=90°$. Острые углы, сумма которых равна 90°, называют **дополнительными** (друг к другу до 90°). Поэтому оба равенства (11) и (12) выражают такие свойства дополнительных углов: **косинус острого угла равен синусу дополнительного угла,** т. е.

$$\cos\alpha=\sin(90°-\alpha), \qquad (13)$$

а синус острого угла — косинусу дополнительного угла, т. е.

$$\sin\alpha=\cos(90°-\alpha). \qquad (14)$$

Используя последние равенства и найденные нами уже значения синуса, получаем, что $\cos 60°=\sin 30°=\frac{1}{2}$, $\cos 45°=\sin 45°=\frac{1}{\sqrt{2}}$, $\cos 30°=\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

24.4 Свойства косинуса и его график. Косинус, как и синус, является функцией угла, точнее, функцией величины угла. Укажем некоторые свойства этой функции. Первые два свойства вытекают из определения косинуса.

1. Косинус любого угла не больше 1 и не меньше — 1, т. е.

$$-1\leqslant\cos\alpha\leqslant 1.$$

При этом если $\cos\alpha=-1$, то $\alpha=180°$, а если $\cos\alpha=1$, то $\alpha=0°$.

2. $\cos(180°-\alpha)=-\cos\alpha$.

3. При возрастании угла от 0° до 180° косинус убывает от 1 до −1. Убывание косинуса означает, что если $\alpha>\beta$, то $\cos\alpha<\cos\beta$.

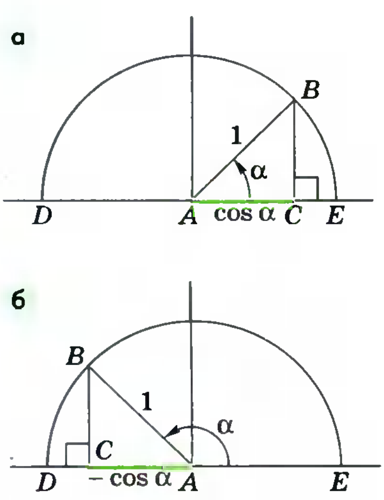


Рис. 237

● Чтобы доказать это свойство, воспользуемся полуокружностью единичного радиуса с центром A и диаметром DE (*рис. 237*). Зададим на прямой DE числовую ось с началом в точке A и единичным отрезком AE. Проведем радиус AB и получим угол BAE некоторой величины α. Пусть точка C — проекция точки B на прямую DE. Тогда $\cos\alpha=AC$ при $\alpha\leqslant 90°$ (*рис. 237, а*) и $\cos\alpha=-AC$ при $\alpha>90°$ (*рис. 237, б*). Это значит, что $\cos\alpha$ равен координате точки C на оси AE.

Когда α возрастает от $0°$ до $180°$ (т. е. когда точка B пробегает полуокружность от точки E до точки D), точка C пробегает диаметр ED от точки E до точки D. При этом координата точки C, т. е. $\cos \alpha$, убывает от 1 до -1.

Замечание. Это свойство можно было бы доказать и так. Воспользуемся равенством $\cos \alpha = \sin (90° - \alpha)$ для острого угла α. Зная свойства синуса, получим, что косинус убывает, когда α возрастает от $0°$ до $90°$. А затем применим свойство 2. Подробное доказательство проведите самостоятельно.

4. ***Косинус однозначно определяет угол.*** Это значит, что из равенства $\cos \alpha = \cos \beta$ вытекает равенство $\alpha = \beta$.

Это свойство доказывается так же, как аналогичное свойство для синуса острого угла. Докажите его самостоятельно.

Косинус, как и синус, находят по таблицам или с помощью калькулятора. В особой таблице для косинуса нет необходимости, если уже составлена таблица значений синуса. Действительно, для углов до $90°$ $\cos \alpha = \sin (90° - \alpha)$, а если $\alpha \geqslant 90°$, то $\cos \alpha$ можно находить из равенства $\cos \alpha = -\cos (180° - \alpha)$.

Как и для синуса, приведем график косинуса (*рис. 238*).

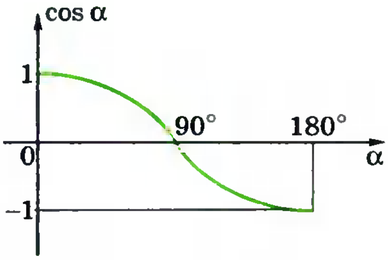


Рис. 238

1. **Как вычислить косинус: а) острого угла; б) тупого угла?**
2. **Чему равен $\cos 0°$, $\cos 90°$, $\cos 180°$?**
3. **Запишите основное тригонометрическое тождество.**
4. **Объясните, почему косинус зависит только от величины угла.**
5. **Как вычислить косинус острого угла в прямоугольном треугольнике?**
6. **Как связаны косинус и синус дополнительных углов?**
7. **Какие свойства косинуса вы знаете?**

Задачи к § 24

24.1. а) Нарисуйте острый угол с вершиной O. Пусть его величина равна α. На стороне угла O отложите отрезок $OA = a$. Пусть точка A_1 — проекция точки A на другую сторону угла O и $a_1 = OA_1$. Докажите, что $a_1 = a \cos \alpha$.
б) Пусть a — произвольный отрезок на стороне угла O, величина которого α, а a_1 — его проекция на другую сторону угла. Докажите, что и тогда $a_1 = a \cos \alpha$.
в) Изменятся ли результаты, полученные в задачах а) и б), если угол O будет тупым?

24.2. Дан отрезок длиной d. Он проектируется на прямую a, и d_1 — длина его проекции. Угол между a и прямой, содержащей отрезок, равен α ($\alpha \leqslant 90°$). Запишите формулу, связывающую d, d_1 и α.
а) Укажите в этой формуле пропорциональные величины.
б) Выразите из нее d.
в) Выразите из нее $\cos \alpha$.
г) Не меняя d, мы увеличиваем α. Что происходит с d_1? Дайте геометрическую иллюстрацию.

д) Не меняя d, мы увеличиваем d_1. Что происходит с α? Дайте геометрическую иллюстрацию.

е) При каком угле α проекция отрезка фиксированной длины достигает наибольшего значения? наименьшего значения? В каких границах лежит длина проекции?

24.3. Нарисуйте две прямые, пересекающиеся под острым углом.

а) На одной из них нарисуйте два равных отрезка. Докажите, что их проекции на другую прямую равны.

б) Пусть на одной из них взяты два отрезка a и b, такие, что $b=ka$. Докажите, что их проекции a_1 и b_1 на другую прямую связаны равенством $b_1=ka_1$.

24.1 **24.4.** Запишите выражения для косинусов углов на *рисунке 225*.

24.5. Вычислите косинусы углов треугольников, рассмотренных в задаче 22.6. Для случаев а), б), в) найдите сами углы.

24.2 **24.6.** Запишите основное тригонометрическое тождество.

а) Выразите из него $\cos^2\alpha$, $\cos\alpha$, $\sin^2\alpha$, $\sin\alpha$.

б) Пусть $\cos\alpha$ растет. Что происходит с $\sin\alpha$?

в) Пусть $\sin\alpha$ убывает. Как меняется $\cos\alpha$?

г) Как из него получить, что $|\sin\alpha|\leqslant 1$, $|\cos\alpha|\leqslant 1$?

24.7. а) Вычислите $\sin\alpha$, если $\cos\alpha$ равен: $\frac{1}{3}$, $-\frac{2}{5}$, $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

б) Вычислите $\cos\alpha$, если $\sin\alpha$ равен: $\frac{1}{3}$; $\frac{\sqrt{2}}{3}$; 0,1.

24.8. Могут ли синус и косинус одного угла равняться: а) $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{3}$; б) 0,6 и −0,6; в) $\frac{1}{\sqrt{5}}$ и $-\frac{2}{\sqrt{5}}$?

24.3 **24.9.** Рассмотрите каждый прямоугольный треугольник на *рисунке 225*.

а) Для каждого острого угла этого треугольника укажите прилежащий катет. Запишите выражение для косинуса этого угла.

б) Для каждого катета этого треугольника укажите угол, для которого этот катет прилежащий.

24.10. Найдите косинусы острых углов прямоугольного треугольника, в котором: а) проекции катетов на гипотенузу равны 1 и 3; б) высота равна 1, а проекция одного из катетов на гипотенузу равна 2; в) один из катетов равен 2, а его проекция на гипотенузу равна 1. Затем найдите сами углы.

24.11. а) Чему равны $\cos 120°$, $\cos 135°$, $\cos 150°$?

б) Составьте для косинуса таблицу, аналогичную таблице из задачи 22.14.

24.12. Вычислите косинусы углов между: а) высотами и сторонами равностороннего треугольника; б) двумя высотами равностороннего треугольника; в) диагоналями и сторонами квадрата.

24.13. Как найти углы равнобокой трапеции, зная все ее стороны?

24.14. Решите задачу 23.1, используя косинус.

24.15. Решите задачу 23.9, используя косинус.

24.16. Вычислите угол, который составляет с прямой a прямая AB, если $AB=1$ и проекция отрезка AB на a равна: а) $\frac{1}{3}$; б) 0,5; в) 0,9; г) 1.

24.17. Вычислите длину проекции единичного отрезка AB на прямую a, если угол между a и прямой AB равен: а) 30°; б) 50°; в) 90°.

24.18. Чему равна длина отрезка AB, если его проекция на прямую a равна 1, а угол между a и прямой AB равен: а) 20°; б) 45°; в) 60°?

24.19. Нарисуйте равносторонний треугольник ABC и его медианы AK и BM. Пусть $AB=1$. Вычислите проекции: а) AB на прямую AC; б) AC на прямую AB; в) AK на прямую AC; г) BM на прямую AB; д) AK на прямую BM.

24.4 **24.20.** Расположите в порядке возрастания косинусы углов, указанных в задаче 22.16.

24.21. Ответьте на вопросы, поставленные в задаче 23.7, но с помощью косинуса.

24.22. Постройте угол, косинус которого равен: а) $\frac{1}{3}$; б) $-\frac{2}{5}$.

24.23. Докажите, что:
а) если $\cos \alpha = \sin \beta$, $\beta < 90°$, то $\alpha + \beta = 90°$;
б) если $\cos \alpha = -\cos \beta$, то $\alpha + \beta = 180°$.

24.24. Найдите косинусы углов, которые образует с ребрами прямоугольного параллелепипеда его диагональ, если ребра параллелепипеда равны a, b, c. Докажите, что сумма квадратов этих косинусов равна 1, а сумма этих косинусов больше 1.

24.25. Найдите косинусы углов, которые образует с гранями прямоугольного параллелепипеда его диагональ, если ребра параллелепипеда равны a, b, c. Какая зависимость существует между ними?

§ 25 Применения косинуса

25.1 Обобщенная теорема Пифагора. Сейчас мы докажем последнюю из трех основных теорем о соотношениях между сторонами и углами треугольника. Для прямоугольного треугольника это соотношение даст просто теорему Пифагора. Поэтому его естественно назвать обобщенной теоремой Пифагора или сокращенно ОТП.

Теорема 20. **В каждом треугольнике квадрат любой его стороны равен сумме квадратов двух других сторон минус удвоенное произведение этих сторон и косинуса угла между ними.**

Дано: $\triangle ABC$ (рис. 239).
Доказать: выполняется равенство

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C \qquad (1)$$

(а также аналогичные равенства для a^2 и b^2).

• **Доказательство.** Для угла C есть три возможности:

1) *Угол C прямой.* Тогда $\cos C = 0$, и формула (1) становится в этом случае теоремой Пифагора для треугольника ABC.

2) *Угол C острый.* В треугольнике ABC есть еще хотя бы один острый угол. Пусть это будет угол B (рис. 239, а). Из вершины A проведем высоту AD. Так как углы B и C острые, точка D лежит внутри BC. Отрезок $CD = b_1$ будет катетом в прямоугольном треугольнике ACD с гипотенузой $AC = b$ и прилежащим острым углом C. Поэтому

$$b_1 = b \cos C. \qquad (2)$$

По теореме Пифагора находим c^2 из другого прямоугольного треугольника ABD с катетами $AD = h$ и $BD = a - b_1$. Получаем:

$$c^2 = (a - b_1)^2 + h^2. \qquad (3)$$

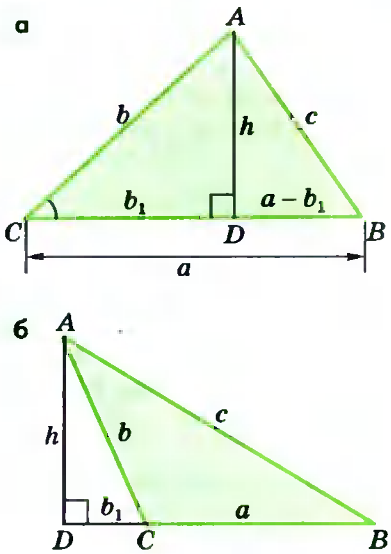


Рис. 239

Но $h^2=b^2-b_1^2$ из треугольника ACD. Подставляя это выражение для h^2 в равенство (3) и заменяя b_1 по формуле (2), приходим к доказываемому равенству:

$$c^2=a^2-2ab_1+b_1^2+b^2-b_1^2=a^2-2ab\cos C+b^2=$$
$$=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

3) *Угол C тупой.* Снова проведем высоту $AD=h$ из вершины A. Теперь ее основание — точка D — лежит на продолжении стороны BC за точку C (рис. 239, б). Снова обозначаем отрезок CD через b_1. В этом случае $BD=a+b_1$, и из прямоугольного треугольника ABD по теореме Пифагора

$$c^2=h^2+(a+b_1)^2. \qquad (4)$$

По определению косинуса тупого угла $\cos C=-\frac{b_1}{b}$. Поэтому $b_1=-b\cos C$. Наконец, из треугольника ACD получаем, что $h^2=b^2-b_1^2$. Подставляя в (4) это выражение для h^2 и выражение для b_1, получаем (1):

$$c^2=b^2-b_1^2+a^2+2ab_1+b_1^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

Доказанную теорему называют еще **теоремой косинуса.**

25.2 Решение треугольников с помощью ОТП. Эту теорему удобно применить для решения следующих двух задач:

Задача 1. **Даны три стороны треугольника. Найти его углы.**

Решение. Пусть известны стороны a, b, c треугольника ABC. Тогда из ОТП получаем, что

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}. \qquad (5)$$

И так как значение косинуса определяет угол, то из (5) угол C находится однозначно. Аналогично находим углы A и B.

Отметим, что формула (5) позволяет сделать такие выводы:

1) Если $c^2=a^2+b^2$, то $\cos C=0$ и $\angle C=90°$ (теорема, обратная теореме Пифагора). Именно согласно этой теореме «египетский треугольник» со сторонами 3, 4, 5 прямоугольный (а не по теореме Пифагора, как иногда говорят).

2) Если $c^2<a^2+b^2$, то $\cos C>0$ и $\angle C$ острый.

3) Если $c^2>a^2+b^2$, то $\cos C<0$ и $\angle C$ тупой.

Задача 2. **Даны две стороны треугольника и угол между ними. Найти третью сторону и остальные два угла.**

Решение. Пусть известны стороны a, b треугольника ABC и угол C между ними. Тогда по формуле (1) находится третья сторона c. Затем, снова пользуясь ОТП, находим углы A и B. Но эти углы можно найти и по теореме синусов (объясните как).

25.3 Средняя линия треугольника. Вот еще прекрасный пример применения ОТП — теорема о средней линии треугольника.

Средней линией треугольника называется отрезок, соединяющий середины двух сторон треугольника *(рис. 240)*. Когда говорят о средней линии, две стороны треугольника, середины которых она соединяет, называют боковыми, а третью сторону — основанием. Это позволяет кратко сформулировать такую теорему:

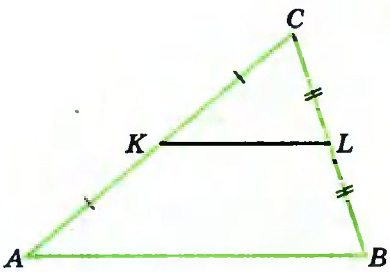


Рис. 240

Теорема 21. **Средняя линия треугольника параллельна основанию и равна половине основания.**

• **Доказательство.** Проведем в треугольнике ABC среднюю линию KL, где K — середина стороны $AC=b$, а L — середина стороны $BC=a$. Пусть $KL=d$. Тогда по ОТП из треугольника KLC

$$d^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2-2\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}\cos C=\frac{1}{4}(a^2+b^2-2ab\cos C)=\frac{c^2}{4}$$

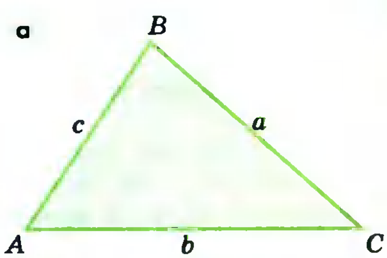
Поэтому $d=\frac{c}{2}$, т. е. средняя линия треугольника равна половине основания.

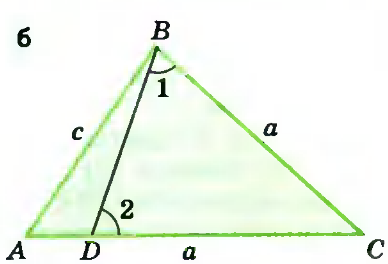
Положим $\angle CKL=\alpha$. Вычисляя $\cos\alpha$ по ОТП из треугольника KLC, получаем:

$$\cos\alpha=\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2+\left(\frac{b}{2}\right)^2-\left(\frac{a}{2}\right)^2}{2\,\frac{c}{2}\cdot\frac{b}{2}}=\frac{c^2+b^2-a^2}{2bc}=\cos A$$

Поэтому $\alpha=\angle A$. Так как соответственные углы при прямых KL и AB и секущей AC равны, то $KL\parallel AB$.

25.4 **Сравнение сторон и углов треугольника.** Следствием ОТП и свойств косинуса является и такая теорема:





$CD=BC=a$
$B>\angle 1=\angle 2>\angle A$

Рис. 241

Теорема 22. **В каждом треугольнике против большей стороны лежит и больший угол.** Верно и обратное: **в каждом треугольнике против большего угла лежит и бóльшая сторона.**

• **Доказательство.** Рассмотрим треугольник ABC со сторонами a, b, c *(рис. 241, а)*. Используя ОТП, получаем:

$$\cos A-\cos B=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}-\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=$$

$$=\frac{ab^2+ac^2-a^3-a^2b-bc^2+b^3}{2abc}=\frac{(b-a)(a+b+c)(a+b-c)}{2abc}. \qquad (6)$$

Так как согласно неравенству треугольника $a+b-c>0$, то знак разности $\cos A-\cos B$ совпадает со знаком разности $b-a$. Из этого и вытекают оба утверждения теоремы:

1) Если $b>a$, то $b-a>0$ и поэтому $\cos A-\cos B>0$, т. е. $\cos A>\cos B$. Так как косинус убывает, то $\angle B>\angle A$.

2) Если $\angle B>\angle A$, то $\cos A>\cos B$ и, следовательно, $\cos A-\cos B>0$. Поэтому $b-a>0$, т. е. $b>a$.

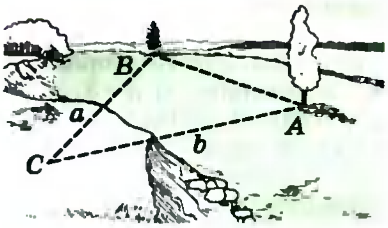


Рис. 242

Замечание. Мы могли бы давно чисто геометрически доказать эту теорему, как только было установлено, что в равнобедренном треугольнике углы при основании равны и что внешний угол треугольника больше внутреннего, с ним не смежного (*рис. 241, б*). Но она нам тогда не была нужна. Теперь же она оказалась следствием ОТП. Ее можно использовать, например, определяя вид треугольника по его сторонам: согласно теореме 22 для этого достаточно узнать, какой угол лежит против большей стороны треугольника. Эти доказательства хорошо показывают различие между двумя методами — вычислительным и наглядным. У каждого метода свои преимущества.

25.5 Практические применения ОТП.

Задача 1. **Найти расстояние между двумя недоступными предметами при наблюдении из данной точки, располагая дальномером.**

Решение. Пусть предметы расположены в точках A, B, а мы находимся в некоторой точке C (*рис. 242*). Измеряя расстояние дальномером, находим $CA=b$, $CB=a$. Измеряем угол C между CA и CB. Тогда расстояние $AB=c$ можно найти по ОТП.

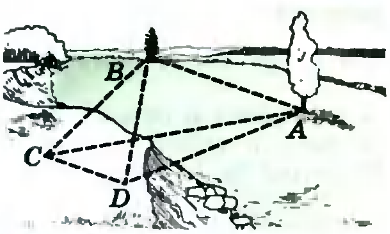


Рис. 243

Задача 2. **Найти расстояние между двумя недоступными предметами, когда нет дальномера.**

Решение. Пусть предметы расположены в точках A, B и видны из точек C, D (*рис. 243*). Измеряя CD и нужные углы, находим расстояния CA и CB (задача 1 п. 23.5). Измеряем также угол между CA и CB. После этого находим AB, применяя ОТП к треугольнику ABC.

1. В чем заключается обобщенная теорема Пифагора (ОТП)?
2. Какие задачи можно решать, используя ОТП?
3. Как определить вид треугольника, используя ОТП?
4. Какие свойства средней линии треугольника вы знаете?

Задачи к §

25.1. а) Нарисуйте треугольник. Не изменяя длин двух его сторон, начните увеличивать угол между ними. Докажите, что при этом третья сторона треугольника увеличивается. Докажите обратное утверждение.
б) В треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ выполняются соотношения $AC=A_1C_1$, $BC=$ $=B_1C_1$ и $\angle C>\angle C_1$. Докажите, что $AB>A_1B_1$. Докажите обратное утверждение.

25.2. Докажите, что сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон. Запишите это соотношение как формулу, связывающую длины диагоналей d_1 и d_2 с длинами a, b соседних сторон параллелограмма. Используя эту формулу, вычислите длину медианы треугольника по трем его сторонам.

25.1 **25.3.** (Решить перед доказательством ОТП.) Пусть в треугольнике ABC известны стороны a и b, а также угол C. Составьте план вычисления стороны c. Вычислите c, если $a=2$, $b=1$, $\angle\ C=60°$.

25.4. Дан треугольник ABC. Запишите формулу для стороны c согласно ОТП. Выразите из нее: а) a^2+b^2; б) b^2; в) ab.

25.5. Дан треугольник ABC. Запишите формулу ОТП для: а) стороны a; б) стороны b.

25.2 **25.6.** Вычислите неизвестные элементы треугольника ABC, в котором: а) $a=3$, $c=2$, $\angle B=60°$; б) $b=3$, $c=4$, $\angle A=135°$; в) $a=2{,}4$, $b=1{,}3$, $\angle C=28°$; г) $a=0{,}15$, $b=0{,}62$, $\angle B=161°$; д) $a=4$, $b=5$, $c=6$; е) $a=4$, $b=c=6$; ж) $a=12$, $b=5$, $c=13$; з) $a=0{,}3$, $b=0{,}4$, $c=0{,}5$.

25.7. Две планки длиной 35 и 42 см скреплены одним концом. Какой взять угол между ними, чтобы расстояние между другими концами планок равнялось: а) 24 см; б) 42 см? Может ли это расстояние для какого-нибудь угла равняться: 5 см; 80 см?

25.8. Определите вид треугольника (по углам), если его стороны равны: а) 5, 6, 7; б) 5, 6, 10; в) 5, 10, 10; г) 30, 40, 50.

25.9. а) В треугольнике известны все стороны. Как вычислить: 1) длину отрезка, соединяющего вершину с данной точкой внутри противоположной ей стороны; 2) длину отрезка, соединяющего две данные точки внутри его сторон; 3) биссектрису треугольника; 4) высоту треугольника? (Считается, что точка на отрезке задана, если известны ее расстояния от его концов.)
б) Получите формулу высоты треугольника, если известны его стороны.

25.10. Стороны треугольника равны 4, 5, 6. Вычислите его наибольшую медиану и наименьшую биссектрису.

25.11. Как вычислить: а) диагонали ромба, если известны его сторона и острый угол; б) диагонали параллелограмма, если известны его стороны и углы?

25.12. Как найти диагональ равнобокой трапеции, если известны ее основание (любое), боковая сторона и угол между ними?

25.3 **25.13.** В треугольнике со сторонами 3, 4, 6 провели три средние линии.
а) Вычислите их длины.
б) Докажите, что они ограничивают треугольник с такими же углами, что и у данного треугольника.
в) Какую часть составляет площадь полученного треугольника от площади данного?
г) Обобщите задачи а), б), в).

25.14. Нарисуйте треугольник. Через середину какой-либо его стороны проведите отрезок, параллельный его стороне. Докажите, что он является средней линией треугольника.

25.15. Нарисуйте треугольник ABC, его среднюю линию $MN \parallel AC$ и любую хорду треугольника, выходящую из вершины B. Докажите, что она делится этой средней линией пополам.

25.16. Хорда треугольника параллельна одной из его сторон и равна ее половине. Является ли она средней линией этого треугольника?

25.17. **Средней линией трапеции** называется ее хорда, соединяющая середины ее боковых сторон. Докажите, что средняя линия трапеции равна полусумме ее оснований.

25.4 **25.18.** Установите вид треугольника по его углам, если: а) его стороны равны: 1) 2, 3, 4; 2) 6, 8, 10; 3) 11, 12, 13; 4) a, $a+1$, $a+2$; б) одна из его медиан равна средней линии, которую она пересекает.

25.19. Нарисуйте любой треугольник. Нарисуйте треугольник, стороны которого в 2 раза больше сторон данного.
а) Докажите, что: 1) эти треугольники одного вида (по углам); 2) углы этих треугольников соответственно равны.
б) Чему равно отношение площадей этих треугольников? Обобщите эту задачу.

25.20. Докажите, что в параллелограмме против большего угла лежит бóльшая диагональ. Докажите обратное утверждение.

25.21. Нарисуйте любой четырехугольник. Можете ли вы, имея на руках только транспортир, установить, какая сторона в нем наибольшая?

25.22. В гранях тетраэдра $PABC$ провели две средние линии, параллельные ребру BC. Докажите, что они равны и параллельны.

25.23. Пусть точки K, M, P соответственно середины ребер OA, OB и OC тетраэдра $OABC$.

а) Докажите, что углы треугольника KMP соответственно равны углам треугольника ABC.

б) Найдите отношение площадей поверхностей тетраэдров $OABC$ и $OKMP$.

25.24. Пусть сторона AB треугольника ABC лежит в плоскости α, а точка C не лежит в этой плоскости, отрезок CP — перпендикуляр, опущенный из точки C на плоскость α, отрезок CH — высота треугольника ABC и $\varphi = \angle CHP$. Докажите, что $S(ABP) = S(ABC) \cos \varphi$.

25.25. В тетраэдре $PABC$ известны длины ребер PA, PB, PC и углы APB, BPC, CPA. Как найти площадь поверхности этого тетраэдра?

§ 26. Тангенс. Котангенс

26.1 **Определение тангенса.** Начнем с одной практической задачи: как измерить высоту столба (вышки или мачты) по длине тени *(рис. 244, а)*? Будем предполагать, что мы можем измерять углы, в частности угол, под которым виден измеряемый предмет из конца его тени *(рис. 244, б)*.

Получили такую геометрическую **задачу:** найти катет $BC = a$ прямоугольного треугольника, зная его катет $AC = b$ и угол A. Подобные задачи мы уже решали.

Вспомним, что $\sin A = \frac{a}{c}$ и $\cos A = \frac{b}{c}$. Поделив первое равенство на второе, получим $\frac{a}{b} = \frac{\sin A}{\cos A}$. Отсюда

$$a = b\,\frac{\sin A}{\cos A}. \qquad (1)$$

В равенство (1) входит отношение двух функций угла A — синуса и косинуса. Оно появляется очень часто при решении самых разнообразных задач. Поэтому его рассматривают как еще одну функцию угла — тангенс.

Определение. **Тангенсом угла** называется отношение синуса угла к его косинусу.

Тангенс обозначается символом tg, так что по определению

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A}. \qquad (2)$$

Для прямого угла тангенс не существует, так как $\cos 90° = 0$ и отношение $\frac{\sin A}{\cos A}$ для прямого угла A теряет смысл.

а

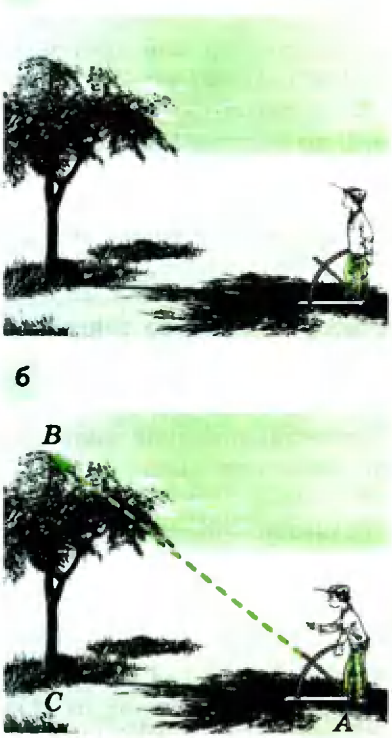


Рис. 244

26.2 **Тангенсы острых углов прямоугольного треугольника.** В прямоугольном треугольнике ABC с катетами $a = BC$ и $b = AC$ *(рис. 245, а)* $\sin A = \frac{a}{c}$ и $\cos A = \frac{b}{c}$. Поэтому

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{a}{c} : \frac{b}{c} = \frac{a}{b}. \qquad (3)$$

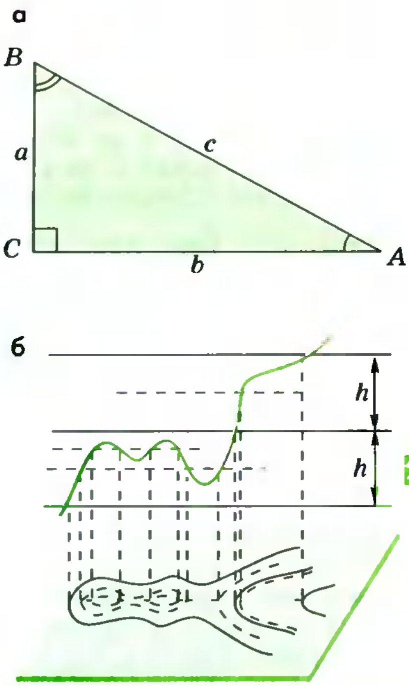
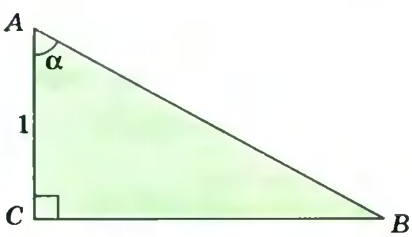
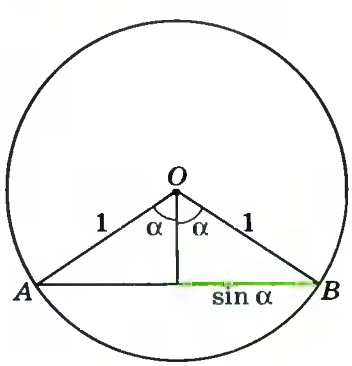


Рис. 245



$AC = 1$, $BC = \text{tg}\,\alpha$

Рис. 246



$|AB| = 2\sin\alpha$

Рис. 247

Тангенс острого угла в прямоугольном треугольнике равен отношению катета, противолежащего этому углу, к прилежащему катету.

Например, тангенс острого угла равнобедренного прямоугольного треугольника равен 1.

Равенство (1), дающее решение задачи о нахождении высоты предмета по его тени, теперь запишется так:

$$a = b\ \text{tg}\ A.$$

А вот другое практическое истолкование тангенса. Тангенс характеризует крутизну подъема в горах, если под крутизной подъема понимать отношение смещения по вертикали к смещению по горизонтали *(рис. 245, б)*. Это удобно при работе с картой.

26.3 **Свойства тангенса.** Тангенс есть отношение синуса к косинусу. А синус и косинус зависят лишь от величины угла. Поэтому и тангенс зависит лишь от величины угла, т. е. является функцией величины угла:

$$\text{tg}\ \alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

Вычислим несколько значений этой функции:

$$\text{tg}\ 0^\circ = \frac{\sin 0^\circ}{\cos 0^\circ} = 0,\quad \text{tg}\ 30^\circ = \frac{\sin 30^\circ}{\cos 30^\circ} = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\text{tg}\ 45^\circ = \frac{\sin 45^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{1}{\sqrt{2}} : \frac{1}{\sqrt{2}} = 1,\quad \text{tg}\ 60^\circ = \frac{\sin 60^\circ}{\cos 60^\circ} = \frac{\sqrt{3}}{2} : \frac{1}{2} = \sqrt{3}.$$

А теперь выясним, как изменяется $\text{tg}\ \alpha$, когда α возрастает от 0° до 90°. Построим прямоугольный треугольник ABC, у которого катет $AC = 1$ и $\angle A = \alpha$ *(рис. 246)*. Тогда другой его катет $BC = \text{tg}\ \alpha$. Когда угол α возрастает от 0° до 90°, катет BC возрастает от 0 до бесконечности. Итак, мы доказали важное свойство тангенса.

1. При увеличении угла от 0° до 90° тангенс растет от 0 до бесконечности.

Из этого свойства вытекает второе свойство тангенса:

2. Для острых углов значение тангенса определяет угол.

Оно доказывается так же, как аналогичное свойство синуса (п. 22.6). Докажите это самостоятельно.

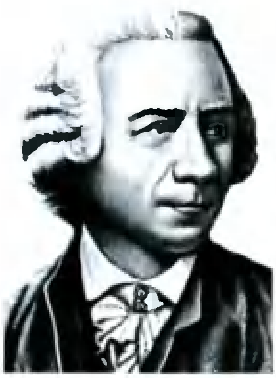
26.4 **Котангенс. Котангенсом** угла называется отношение косинуса угла к его синусу.

Котангенс обозначается символом ctg, так что $\text{ctg}\ A = \frac{\cos A}{\sin A}$.

Котангенс определен для всех углов, кроме углов в 0° и 180°. В интервале $(0^\circ, 180^\circ)$ котангенс убывает от $+\infty$ до $-\infty$.

Котангенс и тангенс связаны равенством $\text{ctg}\ A = \frac{1}{\text{tg}\ A}$.

Региомонтан



Эйлер

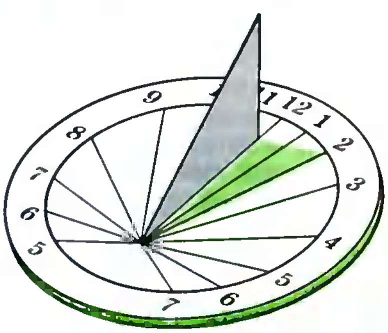


Рис. 248

26.5 **Об истории тригонометрии.** Тригонометрия — «измерение треугольников» — развивалась прежде всего в связи с потребностями астрономии, географии, навигации. Поэтому ее зачатки были уже в Древнем Вавилоне, где астрономия получила значительное развитие. В знаменитом труде греческого ученого **Птолемея** «Альмагест» (II в. н. э.), где изложена античная система мира, содержатся элементы не только тригонометрии на плоскости, но и тригонометрии на сфере. В Древней Греции вместо синуса угла рассматривали длину хорды, соответствующей удвоенному углу между радиусами единичной окружности *(рис. 247)*. Это по существу то же самое, так как синус равен половине такой хорды. Первые тригонометрические таблицы хорд были составлены **Гиппархом** во II в. до н. э. Синус и косинус появляются в астрономических сочинениях индийских ученых в IV—V вв., а тангенс — в трудах арабских ученых в IX—X вв. В частности, тангенс появился в связи с задачей определения высоты Солнца по длине тени, решение которой необходимо для изготовления солнечных часов *(рис. 248)*.

Выделение тригонометрии в специальный раздел математики связано с именем выдающегося персидского ученого **Насирэддина Туси** (1201—1274). В Европе первое изложение тригонометрии было дано в XV в. немецким ученым **Региомонтаном** (1436—1476). Современный вид тригонометрия получила в работах крупнейшего математика XVIII в. **Леонарда Эйлера** (1707—1783).

Обобщенная теорема Пифагора в другом виде доказана уже в «Началах» Евклида. Теорема синусов была получена выдающимся среднеазиатским ученым **Бируни** в XI в.

1. Что такое тангенс угла?
2. Для любого ли угла можно вычислить тангенс?
3. Как вычислить тангенс в прямоугольном треугольнике?
4. Что вы знаете из истории тригонометрии?

Задачи к § 26

26.1. Докажите, что тангенсы смежных углов противоположны.

26.2. Нарисуйте две перпендикулярные прямые a и b. Нарисуйте затем любой отрезок AB. Пусть d_1 и d_2 — длины его проекций на прямые a и b, а α и β — углы, которые прямая AB составляет с прямыми a и b. Докажите, что

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\beta} = \frac{d_2}{d_1}.$$

26.3. а) Докажите, что в прямоугольном треугольнике тангенсы острых углов взаимно обратны, т. е. их произведение равно 1.

б) Составьте и докажите утверждение, обратное а).

26.1 **26.4.** Составьте для тангенсов таблицу, аналогичную таблице из задачи 22.14.

26.5. Запишите формулу тангенса. Выразите из нее: а) синус; б) косинус.

26.2 **26.6.** Запишите выражения для тангенсов углов, указанных на *рисунке 225*.

26.7. Вычислите тангенсы углов треугольников, рассмотренных в задаче 22.6, и найдите сами углы.

26.8. На *рисунке 226* рассмотрите каждый прямоугольный треугольник. В этом треугольнике выберите один из катетов. Выразите его через другой катет.

26.9. Вычислите неизвестные элементы прямоугольного треугольника ABC, в котором угол C прямой, если: а) $a=3{,}2$, $b=4{,}6$; б) $a=0{,}12$, $\angle A=24^\circ$; в) $a=570$, $\angle B=66^\circ$; г) $b=7{,}1$, $\angle B=33^\circ$; д) $b=0{,}63$, $\angle A=10^\circ$.

26.10. Как вычислить сторону AC треугольника ABC, если известна высота BD, опущенная на эту сторону, и углы β_1 и β_2, которые образуют BD со сторонами BA и BC? Рассмотрите два случая, когда BD лежит внутри треугольника ABC и когда вне треугольника ABC.

26.11. В треугольнике ABC известны углы A и C и высота $BD=h$. Найдите AC.

26.12. Как найти: а) углы равнобедренного треугольника, если известны его основание и высота, проведенная к нему; б) углы треугольника, если известны его высота, опущенная на одну из сторон a, и проекции других сторон на прямую, содержащую сторону a?

26.13. а) Две перпендикулярные прямые a и b пересекаются в точке O. Вычислите угол между прямой OA и данными прямыми, если: 1) $|Aa| = 1$, $|Ab| = 1$; 2) $|Aa| = 2$, $|Ab| = 3$.

б) Даны две взаимно перпендикулярные прямые a, b и две точки A, B. Пусть известны расстояния от точек A, B до прямых a, b. Как вычислить угол между прямыми a и AB?

26.14. Высота забора равна длине его тени. Под каким углом падают солнечные лучи?

26.15. Как вычислить угол подъема эскалатора метро?

26.16. Как вычислить высоту башни, не подходя к ней?

26.17. Как вычислить углы четырехугольника, если он: а) ромб и известны его стороны и диагональ; б) равнобедренная трапеция, у которой известны все стороны?

26.18. Как найти угол: а) между диагональю прямоугольника и его сторонами, если стороны известны; б) между диагоналями прямоугольника, стороны которого известны; в) ромба, если диагонали его известны; г) равнобокой трапеции, если известны ее основания и площадь?

26.19. Как найти сторону прямоугольника, если известны: а) другая его сторона и угол между нею и диагональю; б) другая его сторона и угол между диагоналями?

26.20. Известен острый угол ромба и одна из его диагоналей. Как найти другую его диагональ?

26.3 **26.21.** Расположите в порядке возрастания тангенсы таких углов: а) 30°, 50°, 40°; б) 70°, 80°, 100°; в) 60°, 110°, 120°; г) 130°, 140°, 160°.

26.22. Верны ли такие утверждения: а) если углы не равны, то и тангенсы их не равны; б) если тангенсы углов не равны, то и сами углы не равны?

26.23. Постройте угол, тангенс которого равен: а) $\frac{2}{3}$; б) $-0{,}5$; в) 4.

26.24. Чем ближе вы подходите к вертикальному предмету, тем под большим углом вы его видите. Объясните это.

26.25. а) Вы приближаетесь к уличному фонарю по прямой. Что будет происходить с вашей тенью? Дайте этому объяснение.

б) Что будет происходить с тенью, если вы идете по прямой мимо фонаря?

26.26. Два уличных фонаря освещают вертикальный предмет. Что нужно знать, чтобы установить, от какого из них тень будет длиннее?

26.4 **26.27.** Запишите выражения для котангенсов углов, указанных на *рисунке 225*.

26.28. Вычислите котангенсы углов треугольников, рассмотренных в задаче 22.6, и найдите сами эти углы.

26.29. Составьте для котангенсов таблицу, аналогичную таблице из задачи 22.14.

26.30. Постройте угол, котангенс которого равен: а) 3; б) -2; в) 0,4.

26.31. В прямоугольном треугольнике ABC катет $BC=1$. Выразите катет AC и гипотенузу AB через различные тригонометрические функции углов A и B.

Задачи к V главе

1. Как вычислить площадь прямоугольного треугольника, если известны: а) гипотенуза и катет; б) гипотенуза и острый угол; в) катет и прилежащий острый угол; г) катет и высота, опущенная на гипотенузу; д) катет и медиана, проведенная к гипотенузе?
2. Как вычислить площадь равнобедренного треугольника, в котором известны: а) боковая сторона и угол при основании; б) основание и угол при вершине; в) высота, опущенная на основание, и угол при вершине; г) угол при основании и высота, проведенная из вершины основания; д) боковая сторона и медиана к ней?
3. Как вычислить площадь треугольника, если известны: а) две стороны и высота к третьей стороне; б) угол и две высоты, опущенные на его стороны; в) две стороны и медиана к одной из них; г) сторона и два прилежащих к ней угла?
4. Как вычислить площадь прямоугольника, если известны его диагональ и: а) сторона; б) угол между стороной и диагональю; в) угол между диагоналями; г) периметр?
5. Как вычислить площадь ромба, если известны: а) сторона и угол; б) сторона и диагональ; в) высота и диагональ; г) высота и угол; д) диагональ и угол; е) две диагонали?
6. Как вычислить площадь равнобокой трапеции, если известны: а) все ее стороны; б) большее основание, боковая сторона и угол между ними; в) основания и острый угол; г) большее основание, высота и диагональ; д) основания и диагональ; е) большее основание, боковая сторона и диагональ?
7. Как вычислить площадь трапеции, если известны: а) все ее стороны; б) диагональ и углы между нею и всеми сторонами; в) основания и диагонали; г) основания и углы при одном из них?
8. Как вычислить площадь параллелограмма, если известны: а) стороны и диагональ; б) диагонали и угол между ними; в) сторона и диагонали; г) обе высоты и угол между ними?
9. а) Как вычислить площадь выпуклого четырехугольника $ABCD$, если известны: 1) все его стороны и одна диагональ; 2) все стороны и один из углов; 3) диагональ и углы между нею и сторонами?
   б) Можно ли найти площадь выпуклого четырехугольника, если известны: 1) три его стороны и одна диагональ; 2) две противоположные стороны и обе диагонали?
10. Турист вышел из лагеря и шел с постоянной скоростью.
    а) 1 ч он шел на север, 2 ч — на восток и 3 ч — на юг;
    б) 2 ч он шел на юг, 1 ч — на запад и 1,5 ч — на северо-восток;
    в) 1 ч шел по азимуту 60°, 2 ч — по азимуту 135° и 2 ч — по азимуту 240°.
    Затем он вернулся в лагерь по прямой. Сколько времени он будет добираться до лагеря?
11. В треугольной пирамиде $PABC$ провели высоту PQ. При этом оказалось, что $QA = QB = QC$. Докажите, что $PA = PB = PC$.
12. Нарисуйте правильную четырехугольную пирамиду $PABCD$, основанием которой является квадрат $ABCD$. Нарисуйте высоты ее боковых граней, проведенные из вершины P. Нарисуйте высоту пирамиды.
13. Каков кратчайший путь по поверхности куба: а) из одной вершины в вершину, противоположную ей (т. е. из одного конца диагонали куба в другой конец этой же диагонали куба); б) из центра одной грани в центр соседней грани; в) из центра одной грани в центр противоположной грани.
14. В тетраэдре $PABC$ ребра PA, PB, PC попарно взаимно перпендикулярны.
    а) Каким по виду треугольником является треугольник ABC?
    б) Могут ли все четыре грани тетраэдра быть прямоугольными треугольниками?

ГЛАВА VI Векторы

Все теоремы, доказанные в предыдущих главах (кроме теоремы синусов), были известны еще в Древней Греции. В главе VII тоже доказываются лишь такие теоремы, которые были еще в «Началах» Евклида. А в этой главе говорится о разделе геометрии, который создан значительно позднее — в XIX—XX вв.

Теория векторов получила развитие на почве физики. И мы начинаем изучать векторы именно сейчас, чтобы обеспечить курс физики необходимым ему математическим аппаратом.

§ 27 Векторы

27.1 **Понятие вектора.** Известные вам величины могут быть двух видов. Есть величины, которые вполне определяются своими численными значениями (при данных единицах измерения): например, длина, площадь, масса. Такие величины называются **скалярными величинами** или, короче, **скалярами**.

Но есть и такие величины, которые задаются не только своими численными значениями, но и направлениями: например, скорость, сила, давление. Так, часто недостаточно знать, что скорость автомобиля равна 50 км/ч, надо еще знать, в каком направлении едет этот автомобиль.

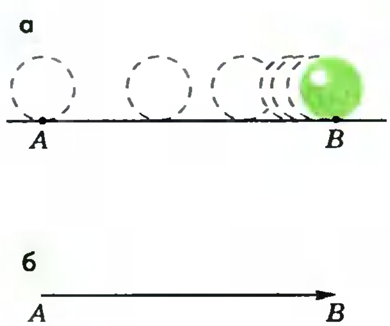


Рис. 249

Величины, которые характеризуются не только численным значением, но и направлением, называются **векторными величинами** или, короче, **векторами**.

Численное значение вектора называется его **модулем**.

Для обозначения векторов употребляются стрелки: $\vec{a}$, $\vec{v}$. Эти обозначения читаются так: «Вектор $\vec{a}$», «Вектор $\vec{v}$». Для модулей векторов употребляется тот же знак, что и для модулей чисел: $|\vec{a}|$, $|\vec{v}|$.

27.2 Направленные отрезки. Простейший пример векторной величины представляет перемещение. Перемещение характеризуется расстоянием и направлением. Если тело переместилось из точки A в точку B, то это перемещение естественно изобразить отрезком, направленным из точки A в точку B *(рис. 249)*.

Так появляется **направленный отрезок.** У направленного отрезка указан порядок концов: первый конец считается началом, второй — концом. Рисуют направленные отрезки всегда со стрелкой на конце. Обозначают направленный отрезок с началом A и концом B так: $\overrightarrow{AB}$.

Итак, вектор — перемещение из точки A в точку B — мы изобразили направленным отрезком $\overrightarrow{AB}$. Направленными отрезками изображают и другие векторы: например, в физике силу, скорость *(рис. 250)*.

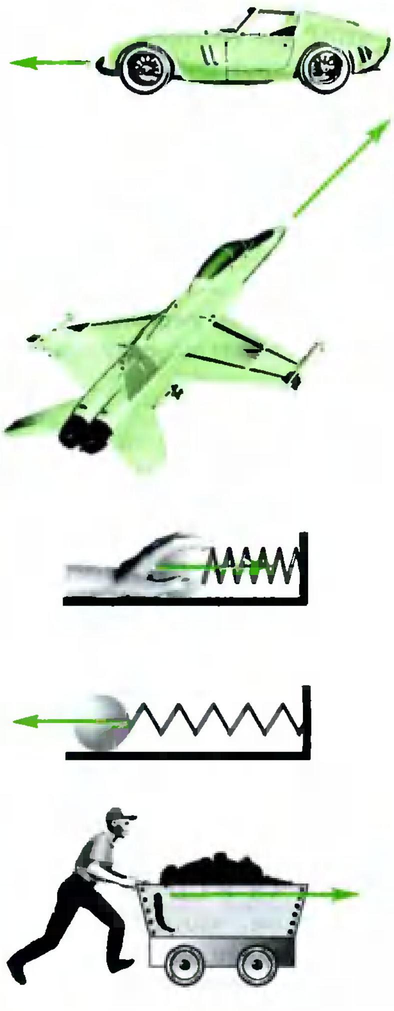


Рис. 250

Векторами называют и сами направленные отрезки. Это не совсем точно: предмет и его изображение не одно и то же. Но в обыденной речи, показывая, например, слона на фотографии, говорят: «Это слон» — и никто не говорит: «Это изображение слона». Так и в геометрии с вектором: рисуя направленный отрезок, говорят, что это вектор, хотя это только изображение вектора.

Если направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ изображает вектор $\vec{a}$, то пишем: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ — и про направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$ говорим: «Вектор $\overrightarrow{AB}$ равен вектору $\vec{a}$». Модуль вектора $\vec{a}$ — это длина направленного отрезка $\overrightarrow{AB}$, или, что то же самое, длина отрезка AB. Поэтому в геометрии модуль вектора называется также **длиной вектора.**

Как и об обычных отрезках, о направленных отрезках мы будем говорить, что они лежат на прямой, или взаимно перпендикулярны, или перпендикулярны некоторой прямой, или параллельны друг другу, или параллельны некоторой прямой и т. п.

Мы говорим также, что «вектор лежит на прямой», если изображающий его направленный отрезок лежит на этой прямой.

Два вектора называются **коллинеарными,** если изображающие их направленные отрезки параллельны или лежат на одной прямой *(рис. 251)*. Коллинеарные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначаются так: $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

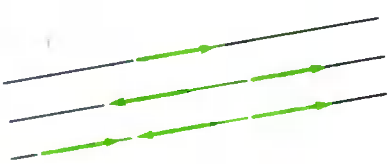


Рис. 251

Говорят, что **векторы взаимно перпендикулярны,** если изображающие их направленные отрезки взаимно перпендикулярны. Перпендикулярность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначается так: $\vec{a} \perp \vec{b}$.

Наконец, мы говорим, что вектор $\vec{v}$ перпендикулярен (параллелен) прямой a, если изображающий его направленный отрезок перпендикулярен (параллелен) прямой a, и пишем: $\vec{v} \perp a$ ($\vec{v} \parallel a$).

27.3 Сонаправленные отрезки и векторы. Когда говорят, что корабли или самолеты идут в одном направлении, то имеют в виду, что они следуют друг за другом или идут

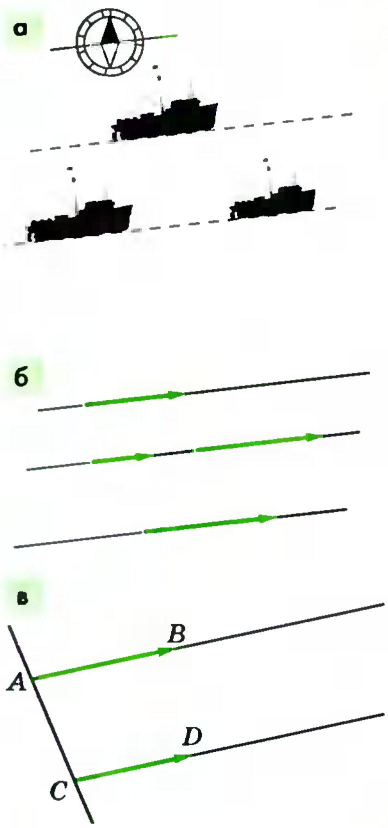


Рис. 252

параллельными курсами *(рис. 252, а)*. Так и о векторах говорят, что они **одинаково направлены**, или, короче, **сонаправлены**, если они коллинеарны и направлены в одну сторону *(рис. 252, б)*. При этом мы считаем, что **коллинеарные векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ сонаправлены,** если лучи AB и CD лежат по одну сторону от некоторой непараллельной им прямой, т. е. в одной полуплоскости, ограниченной этой прямой *(рис. 252, в)*.

Ясно, что эту прямую можно выбрать перпендикулярной лучам AB и CD *(рис. 253)*. И справедлив первый **признак** *сонаправленности векторов*:

векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ сонаправлены, если: 1) они перпендикулярны некоторой прямой a; 2) лучи AB и CD лежат по одну сторону от этой прямой.

• Действительно, поскольку $\overrightarrow{AB} \perp a$ и $\overrightarrow{CD} \perp a$, то векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ коллинеарны (по следствию о параллельности перпендикуляров, п. 13.2). А второе условие и означает сонаправленность векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$.

Сонаправленность векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обозначают так: $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, но не сонаправлены, то говорят, что они **направлены противоположно**, и пишут: $\vec{a} \downarrow\uparrow \vec{b}$ *(рис. 254)*.

Следующая теорема тоже является **признаком** сонаправленности.

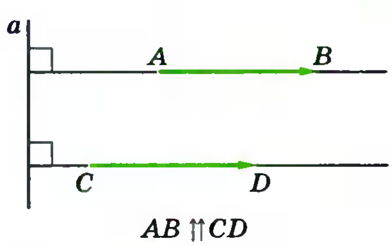


Рис. 253

Теорема 23 *(о сонаправленных векторах)*. **Два вектора, сонаправленные с третьим вектором, сонаправлены.**

• **Доказательство.** Пусть векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ сонаправлены с вектором $\overrightarrow{MN}$ *(рис. 255)*. Докажем, что $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$. Так как $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{MN}$, то найдется такая перпендикулярная им прямая a, от которой лучи AB и MN лежат по одну сторону. Точно так же для лучей CD и MN найдется перпендикулярная им прямая b, от которой они лежат по одну сторону. Если прямые a и b не совпадают, то они параллельны (как перпендикуляры к одной и той же прямой MN). Тогда из двух полуплоскостей, которые ограничены прямыми a и b и содержат луч MN, одна содержит другую. Будем считать, что это полуплоскость, ограниченная прямой a. Эта полуплоскость содержит лучи AB, CD, MN. Кроме того, векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ перпендикулярны прямой a. По признаку сонаправленности векторов $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$.

О сонаправленных векторах говорят, что у них одно и то же направление. У несонаправленных векторов направления разные.

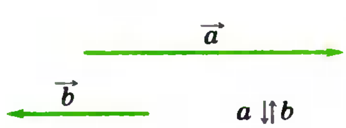


Рис. 254

27.4 Равенство векторов. Векторы называются равными, если их длины равны и они сонаправлены *(рис. 256, а)*.

Обратите внимание, что векторы, имеющие равные длины, но разные направления, не равны *(рис. 256, б)*.

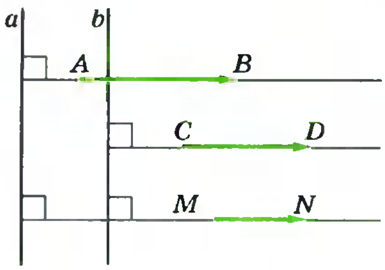


Рис. 255

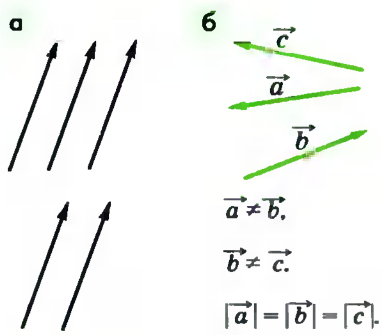


Рис. 256

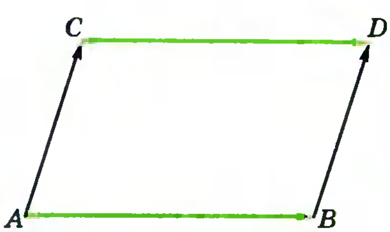


Рис. 257

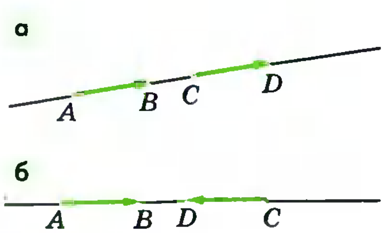


Рис. 258

Для равенства векторных величин выполняются следующие основные свойства равенства величин:

1. Каждый вектор равен самому себе.
2. Если вектор $\vec{a}$ равен вектору $\vec{b}$, то $\vec{b}$ равен $\vec{a}$.
3. Два вектора, равные третьему вектору, равны.

Первые два свойства вытекают, очевидно, из определения равенства векторов. Докажем третье свойство (его можно считать первым **признаком** равенства векторов).

• Пусть $\vec{a} = \vec{b}$ и $\vec{c} = \vec{b}$. Тогда $|\vec{a}| = |\vec{b}|$ и $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{b}$, а также $|\vec{c}| = |\vec{b}|$ и $\vec{c} \uparrow\uparrow \vec{b}$. Из равенств модулей следует, что $|\vec{a}| = |\vec{c}|$. А из теоремы о сонаправленности векторов вытекает, что $\vec{a} \uparrow\uparrow \vec{c}$. Поэтому $\vec{a} = \vec{c}$.

Наглядно представить себе равные векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$, не лежащие на одной прямой, можно как одинаково направленные противоположные стороны параллелограмма $ABDC$ (рис. 257).

• Действительно, из равенства $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ вытекает, что $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \overrightarrow{CD}$ и $AB = CD$. Поэтому четырехугольник $ABDC$ — параллелограмм (по третьему признаку параллелограмма, п. 19.2).

Обратное утверждение является вторым признаком равенства векторов: **если четырехугольник $ABDC$ — параллелограмм, то $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.**

• Действительно, $AB = CD$ и $AB \parallel CD$. Кроме того, лучи AB и CD лежат по одну сторону от прямой AC. Поэтому $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ сонаправлены. Значит, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$.

Обе пары противоположных сторон параллелограмма рассматриваются еще в одном (уже третьем) признаке равенства векторов. Этот признак справедлив и для векторов, лежащих на одной прямой. Сформулируем его в виде следующей теоремы:

Теорема 24. ***Если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.***

• **Доказательство.** Пусть даны равные векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$. Если они не лежат на одной прямой, то согласно доказанному $ABDC$ — параллелограмм. И по второму признаку равенства векторов $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$ (рис. 257).

Пусть теперь $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ лежат на одной прямой. Тогда они заключены в одном отрезке с концами в начале одного вектора и в конце другого (рис. 258, а). (Если бы концы такого отрезка оба были концами или оба были началами данных векторов, то векторы были бы направлены противоположно (рис. 258, б).)

Пусть, например, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ заключены в отрезке AD. Тогда так как $AB = CD$, то $BD = AD - AB = AD - CD = AC$. Отрезки AC и BD равны, т. е. векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ равны по длине. Вектор $\overrightarrow{AC}$ можно продолжить за конец C до точки D. А это означает, что векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$ одинаково направлены. Поэтому они равны: $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$.

Рис. 259

27.5 **Откладывание вектора, равного данному.** Вектор, равный данному, можно изобразить направленным отрезком с началом в любой точке плоскости. Отложить от данной точки вектор, равный данному, — значит построить направленный отрезок с началом в этой точке, изображающий данный вектор.

На *рисунке 259* от точки A отложен вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\vec{a}$.

Теорема 25 *(об откладывании вектора).* **От любой точки можно отложить вектор, равный данному, и притом только один.**

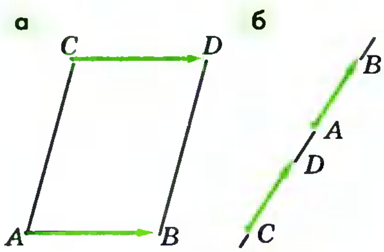


Рис. 260

• **Доказательство.** Пусть даны вектор $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ и точка C, от которой надо отложить вектор, равный $\vec{a}$. Возможны два случая:

1. Точка C не лежит на прямой AB (общий случай).
2. Точка C лежит на прямой AB (частный случай).

В первом случае построим параллелограмм $ABDC$ (*рис. 260, а*). Получим вектор $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$.

Во втором случае на прямой AB от точки C в нужном направлении откладываем направленный отрезок $\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}$ (*рис. 260, б*).

В обоих случаях строится единственная точка D.

27.6 **Нулевой вектор.** Будем, как и прежде, говорить, что вектор $\overrightarrow{AB}$ изображает перемещение из точки A в точку B. Каким вектором изобразить частный случай перемещения — покой, т. е. «перемещение» из точки A в ту же точку A?

Чтобы изобразить такое «стояние на месте», надо ввести **нулевой вектор.** По определению модуль нулевого вектора равен нулю, а направления он не имеет. Нулевой вектор называют **нуль-вектором** и обозначают так: $\vec{0}$.

Изображается нулевой вектор любой точкой, которая рассматривается как начало и конец этого вектора. Считается, что нуль-вектор параллелен и перпендикулярен любой прямой (любому вектору).

Если произвольно взятый вектор $\overrightarrow{AB}$ окажется нуль-вектором, то его начало A и конец B — это одна и та же точка.

Доказанные теоремы 24 и 25 верны и для нуль-вектора.

После того как появится нуль-вектор, уже нельзя сказать, что каждый вектор изображается направленным отрезком (каждый, кроме нулевого).

Подчеркнем, что сонаправленность определена только для ненулевых векторов и теорема 23 о сонаправленных векторах верна лишь для ненулевых векторов.

В дальнейшем при доказательствах теорем случай нуль-вектора обычно будет оговариваться особо.

1. Чем отличается векторная величина от скалярной?
2. Приведите собственные примеры скалярных и векторных величин.
3. В каком случае два вектора не равны?

Задачи к § 27

27.2 **27.1.** Нарисуйте прямоугольник $ABCD$ и проведите диагонали. Пусть O — точка их пересечения. Назовите направленные отрезки, имеющие начала и концы в точках A, B, C, D, O и: а) лежащие на прямой AC; б) параллельные прямой CD; в) перпендикулярные прямой CD; г) параллельные $\overrightarrow{BC}$; в) перпендикулярные $\overrightarrow{AD}$.

27.2. Нарисуйте параллелограмм $ABCD$ и проведите его диагонали. Пусть O — точка их пересечения. Назовите вектор с концом и началом в точках A, B, C, D, O и: а) лежащий на прямой BD; б) параллельный прямой AD; в) коллинеарный вектору $\overrightarrow{AB}$; г) коллинеарный вектору $\overrightarrow{CD}$.

27.3. Нарисуйте прямую a. Нарисуйте направленный отрезок: а) $\overrightarrow{AB}$, лежащий на прямой a; б) $\overrightarrow{A_1B_1}$, параллельный прямой a; в) $\overrightarrow{A_2B_2}$ перпендикулярный прямой a.

27.4. Нарисуйте направленный отрезок $\overrightarrow{AB}$. Нарисуйте направленные отрезки $\overrightarrow{CD} \parallel \overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{MN} \perp \overrightarrow{AB}$.

27.5. Нарисуйте прямую a и векторы $\vec{x}$, лежащий на a, $\vec{y}$, параллельный a, и $\vec{z}$, перпендикулярный a.

27.6. Нарисуйте вектор $\vec{a}$ и вектор $\vec{b}$, параллельный $\vec{a}$, а также вектор $\vec{c}$, перпендикулярный $\vec{a}$.

27.3 **27.7.** Нарисуйте две параллельные прямые. Нарисуйте на них: а) сонаправленные векторы; б) противоположно направленные векторы.

27.8. Нарисуйте прямую. Нарисуйте на ней: а) сонаправленные векторы; б) противоположно направленные векторы.

27.9. Нарисуйте вектор $\vec{a}$. Нарисуйте вектор: а) сонаправленный с вектором $\vec{a}$; б) направленный противоположно вектору $\vec{a}$.

27.4 **27.10.** Нарисуйте: а) отрезок AB и его середину — точку C; б) параллелограмм $ABCD$; в) параллелограмм $ABCD$, диагонали которого пересекаются в точке O. Укажите равные векторы, начала и концы которых лежат в точках A, B, C, D, O.

27.11. Пусть $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Какие еще равные векторы можно задать этими точками?

27.5 **27.12.** Нарисуйте прямую a и на ней две точки A и B.
а) Нарисуйте вектор $\overrightarrow{AB}$ и вектор $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$.
б) Нарисуйте вектор $\overrightarrow{BA}$ и вектор $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA}$.
в) Равны ли векторы $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$?

27.13. Нарисуйте вектор $\vec{a}$ и точку A. Отложите от нее вектор $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$. От точки B отложите вектор $\overrightarrow{BC}$, равный $\vec{a}$. Нарисуйте точку X, такую, что $\overrightarrow{XA} = \vec{a}$.

27.14. Нарисуйте прямую p и вектор $\vec{a}$, непараллельный прямой p.
а) От двух разных точек A_1 и A_2 прямой p отложите два вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ и $\overrightarrow{A_2B_2}$, равные $\vec{a}$. Почему прямые A_1B_1 и A_2B_2 образуют с p равные углы? Почему $\overrightarrow{B_1B_2} = \overrightarrow{A_1A_2}$?
б) Отложите от двух точек A_1 и A_2 векторы $\overrightarrow{A_1C_1}$ и $\overrightarrow{A_2C_2}$, сонаправленные с вектором $\vec{a}$. Почему прямые A_1C_1 и A_2C_2 образуют с p равные углы? Верно ли это, если $\overrightarrow{A_1C_1} \uparrow\uparrow \vec{a}$ и $\overrightarrow{A_2C_2} \downarrow\uparrow \vec{a}$?

27.15. Нарисуйте треугольник ABC.
а) Нарисуйте точку A_1 и отложите векторы $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B_1C_1} = \overrightarrow{BC}$ и $\overrightarrow{A_1D} = \overrightarrow{AC}$. Что вы заметили? Попытайтесь это объяснить, используя перемещение материальной точки.
б) Отложите векторы $\overrightarrow{A_1K} = \overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{KL} = \overrightarrow{CB}$ и $\overrightarrow{LM} = \overrightarrow{AC}$. Что вы заметили? Попытайтесь это объяснить.

27.6 **27.16.** Что следует из условий: а) $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$; б) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BA}$; в) $\vec{a} \parallel p$ и $\vec{a} \perp p$, где p — некоторая прямая; г) $\vec{a} \parallel \vec{b}$ и $\vec{a} \perp \vec{b}$?

§ 28 Сложение векторов

28.1 **Правило треугольника. Определение сложения.** Если тело переместить из точки A в точку B, а потом из точки B в точку C, то его суммарное перемещение из A в C представляется вектором $\overrightarrow{AC}$ (рис. 261, а). Так складываются векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$:

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}. \quad (1)$$

В рассмотренном случае конец первого вектора $\overrightarrow{AB}$ является началом второго вектора $\overrightarrow{BC}$. В общем же случае векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ складываются так. Откладывают от какой-либо точки A вектор $\overrightarrow{AB}$, равный вектору $\vec{a}$ (рис. 261, б). Потом от точки B откладывают вектор $\overrightarrow{BC}$, равный вектору $\vec{b}$. Тогда вектор $\overrightarrow{AC}$ представляет **сумму векторов** $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

$$\vec{a}+\vec{b}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}. \quad (2)$$

Это правило получения суммы двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется **правилом** треугольника (потому что если векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$ не лежат на одной прямой, то их сумма представляет сторону треугольника ABC). Итак, можно сформулировать определение: **суммой** двух **векторов** называется вектор, построенный по правилу треугольника.

Мы определили сумму данных векторов, отложенную от данной точки. А что будет, если взять другую точку? Оказывается, что сумма получится равной прежней. А именно если отложить от точки A_1 тот же вектор $\vec{a}: \overrightarrow{A_1B_1}=\vec{a}$, а затем от точки B_1 отложить вектор $\vec{b}: \overrightarrow{B_1C_1}=\vec{b}$, то сумма $\overrightarrow{A_1B_1}+\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{A_1C_1}$ будет равна вектору $\overrightarrow{AC}$, полученному в равенстве (2), т. е. $\overrightarrow{A_1C_1}=\overrightarrow{AC}$ (рис. 261, в).

• Докажем это. Так как $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{AB}$, то по теореме 24 $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{BB_1}$.

Аналогично из равенства $\overrightarrow{B_1C_1}=\overrightarrow{BC}$ следует равенство $\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{CC_1}$. Поэтому $\overrightarrow{AA_1}=\overrightarrow{CC_1}$.

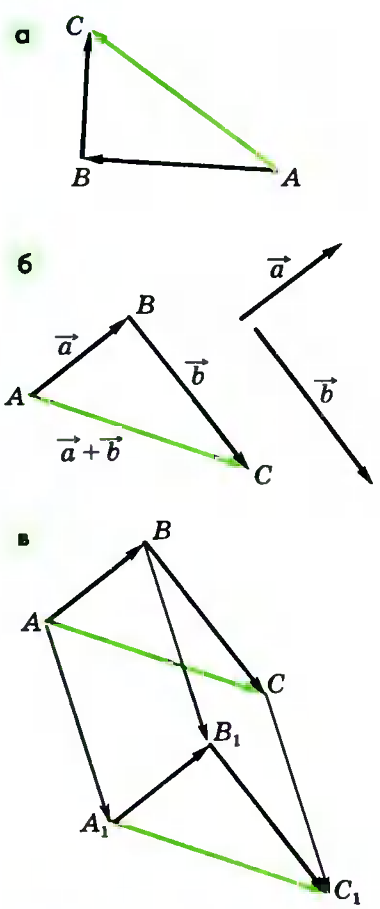


Рис. 261

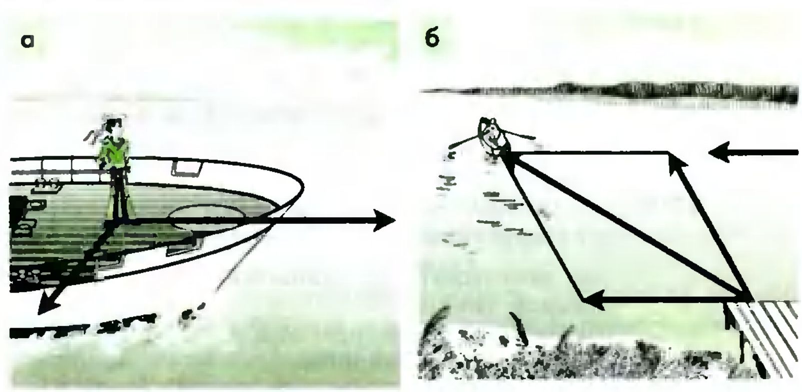


Рис. 262

Но из этого равенства по той же теореме 24 следует, что $\overrightarrow{A_1C_1}=\overrightarrow{AC}$.

28.2 **Правило параллелограмма.** Правило треугольника естественно применяется при последовательных перемещениях тела: сначала перемещение $\overrightarrow{AB}$, затем $\overrightarrow{BC}$, а в сумме получаем $\overrightarrow{AC}$. А если тело одновременно испытывает два перемещения? Например, человек, идущий по палубе плывущего корабля (*рис. 262, а*), или лодка, пересекающая реку (*рис. 262, б*): ее перемещение слагается из перемещений поперек реки и по течению реки.

Каждое из этих слагаемых перемещений (за один и тот же промежуток времени) изобразим вектором, отложенным от точки A: $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ (*рис. 263*). Рассматриваем лишь случай, когда векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны. Тогда суммарное перемещение изобразится диагональю $\overrightarrow{AC}$ параллелограмма $ABCD$, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$.

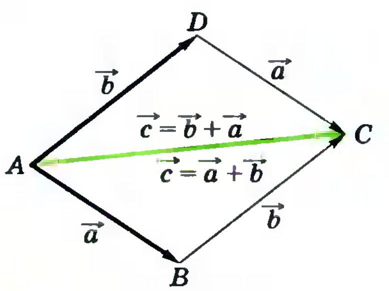


Рис. 263

• Убедимся, что вектор $\overrightarrow{AC}$ будет суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, построенной по правилу треугольника. Действительно, так как $ABCD$ — параллелограмм, то $\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}$. Поэтому $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$. По правилу треугольника

$$\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}, \text{ т. е. } \overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}.$$

Мы доказали **правило** параллелограмма:

если векторы неколлинеарны, то их сумма представляется диагональю построенного на них параллелограмма.

28.3 **Свойства сложения векторов.** У операции сложения векторов те же свойства, что и у операции сложения чисел.

1. Для любых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$

$$\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a} \quad (3)$$

(переместительный закон, или коммутативность сложения).

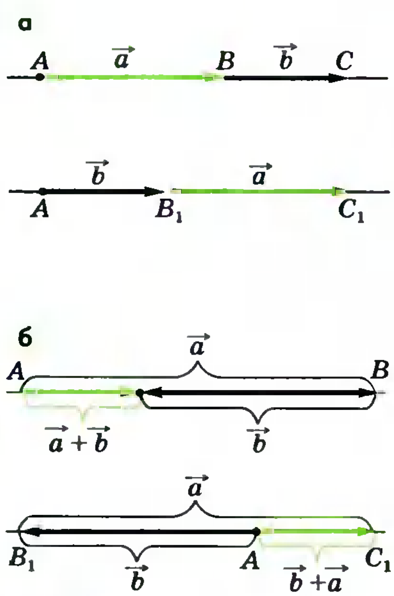


Рис. 264

• **Доказательство.** Возможны два случая:

1) Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны. Тогда отложим их от точки A: $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$ — и построим на них параллелограмм $ABCD$ (*рис. 263*). Поскольку

$$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC},\ \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=\vec{a},\ \overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AD}=\vec{b},$$

то имеет место равенство (3).

2) Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Тогда векторы $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ лежат на одной прямой (*рис. 264*). На той же прямой лежат векторы $\overrightarrow{AB_1}=\vec{b}$ и $\overrightarrow{B_1C_1}=\vec{a}$. Надо доказать, что точки C и C_1 совпадают. Если $\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{b}$, то это следует из сложения отрезков (*рис. 264, а*), а если $\vec{a}\downarrow\uparrow\vec{b}$, то из вычитания отрезков (*рис. 264, б*). Подробное доказательство желающие могут завершить самостоятельно.

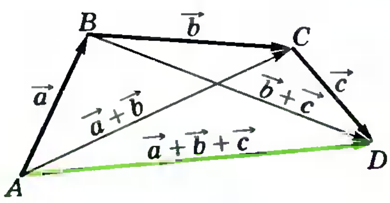


Рис. 265

2. Для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$

$$(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c}) \qquad (4)$$

(сочетательный закон, или ассоциативность сложения).

• **Доказательство.** Отложим от точки A вектор $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, затем вектор $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$ и вектор $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$ *(рис. 265)*. Тогда $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$, и с другой стороны, $\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})=\overrightarrow{AB}+(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}$.

Итак, $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$.

Пользуясь этим законом для трех векторов, можно группировать слагаемые при любом их числе, т. е. заключать их в скобки любым образом. Поэтому суммы векторов пишут, никак не объединяя слагаемые скобками: $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$, $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$ и т. д.

Из сочетательного и переместительного законов следует, что, складывая любое число векторов, можно как угодно переставлять и группировать слагаемые. Это значительно облегчает сложение при числе слагаемых, большем двух.

Чтобы сложить несколько векторов, например векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$, удобно построить векторную ломаную *(рис. 266, а)*. Эта ломаная состоит из направленных отрезков $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{b}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{c}$, $\overrightarrow{DE}=\vec{d}$. Вектор $\overrightarrow{AE}$, идущий от начала ломаной $ABCDE$ в ее конец, и является суммой: $\overrightarrow{AE}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}$.

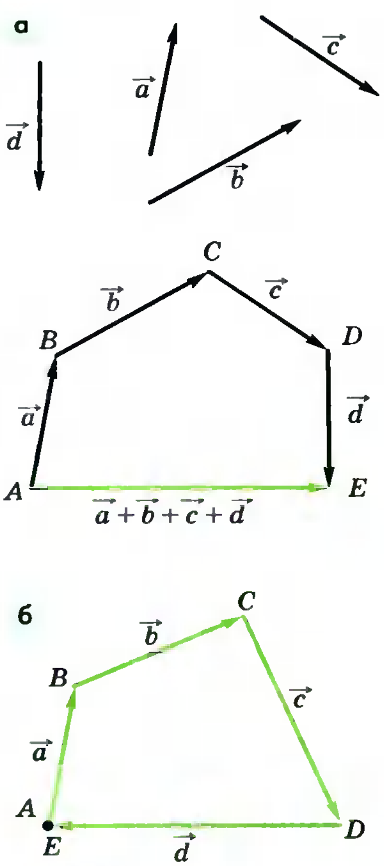


Рис. 266

Если ломаная получилась замкнутой, то сумма векторов равна нуль-вектору *(рис. 266, б)*.

Отметим еще очевидное свойство нуль-вектора:

3. Для любого вектора $\vec{a}$ выполняется равенство $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

28.4 **Вычитание векторов.** Вычитание векторов, как и вычитание чисел, — это действие, обратное сложению. Поэтому **разностью** $\vec{a}-\vec{b}$ двух **векторов** $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, дающий в сумме с вектором $\vec{b}$ вектор $\vec{a}$: $\vec{c}+\vec{b}=\vec{a}$.

Разность двух данных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ можно построить так. Отложим от какой-либо точки O данные векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Получим $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ *(рис. 267)*. Тогда вектор $\overrightarrow{BA}$ и будет разностью $\vec{a}-\vec{b}$, поскольку $\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BA}$. Поэтому можно написать:

$$\vec{c}=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\vec{a}-\vec{b}. \qquad (5)$$

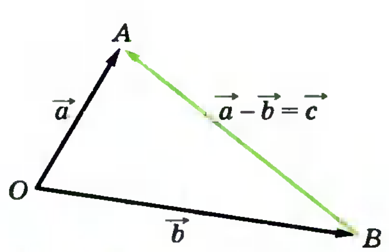


Рис. 267

28.5 **Противоположный вектор.** Два ненулевых вектора называются **противоположными**, если их длины равны и они направлены противоположно *(рис. 268)*. Каждый из таких двух векторов называется противоположным другому из них.

Нуль-вектор считается противоположным сам себе.

Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначается $-\vec{a}$ (и читается «минус $\vec{a}$»).

Рис. 268

Если сложить противоположные векторы (по правилу треугольника), **то в сумме получится нуль-вектор, т. е.**

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}. \qquad (6)$$

• Действительно, пусть, вектор $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$ изображает перемещение из точки A в точку B (*рис. 268*). Отложив от точки B вектор $-\vec{a}$, мы должны переместиться по лучу BA из точки B на расстояние, равное AB, т. е. вернуться в точку A. Итак, если $\vec{a}=\overrightarrow{AB}$, то $-\vec{a}=\overrightarrow{BA}$ и

$$\vec{a}+(-\vec{a})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{AA}=\vec{0}.$$

Верно и обратное утверждение: **если сумма двух векторов равна нуль-вектору, то они противоположны.**

• Действительно, в этом случае длины векторов равны и они направлены противоположно.

Вычитание векторов можно свести к сложению. А именно, **чтобы из вектора $\vec{a}$ вычесть вектор $\vec{b}$, можно к вектору $\vec{a}$ прибавить вектор $-\vec{b}$, т. е.**

$$\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b}). \qquad (7)$$

• Действительно, пусть, как и в равенстве (5), $\vec{c}=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\vec{a}-\vec{b}$. По правилу треугольника $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}$. Кроме того, $\overrightarrow{BO}=-\overrightarrow{OB}=-\vec{b}$.

Поэтому

$$\vec{a}-\vec{b}=\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{BO}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OA}+(-\overrightarrow{OB})=\vec{a}+(-\vec{b}),$$

что и утверждает равенство (7).

Мы можем теперь переносить вектор из одной части равенства в другую, изменяя его знак, т. е. заменяя его на противоположный вектор: из равенства $\vec{c}+\vec{b}=\vec{a}$ следует, что $\vec{c}=\vec{a}+(-\vec{b})$.

28.6 **Разложение вектора на составляющие.** Самолет взлетел, его перемещение слагается из двух составляющих: по горизонтали и по вертикали (*рис. 269, а*). Допустим, сместившись по горизонтали на 100 км, он набрал высоту 10 км. Горизонтальная составляющая его перемещения равна 100 км, вертикальная — 10 км. Это составляющие вектора перемещения самолета. Сам вектор перемещения является их суммой.

Определение. Составляющими данного **вектора** называются векторы, дающие в сумме этот вектор.

Говорят, что вектор разложен на составляющие.

Теорема 26 (*о разложении вектора на составляющие*). **Пусть заданы две пересекающиеся прямые. Каждый вектор можно разложить на составляющие, лежащие на этих прямых.**

• **Доказательство** Пусть даны две прямые a и b, пересекающиеся в точке O, и вектор $\vec{v}$. Отложим вектор $\vec{v}$ от точки $O: \vec{v}=\overrightarrow{OV}$ (*рис. 269, б*). Допустим, что вектор $\overrightarrow{OV}$ не лежит ни на одной из данных прямых. Тогда проведем через точку V

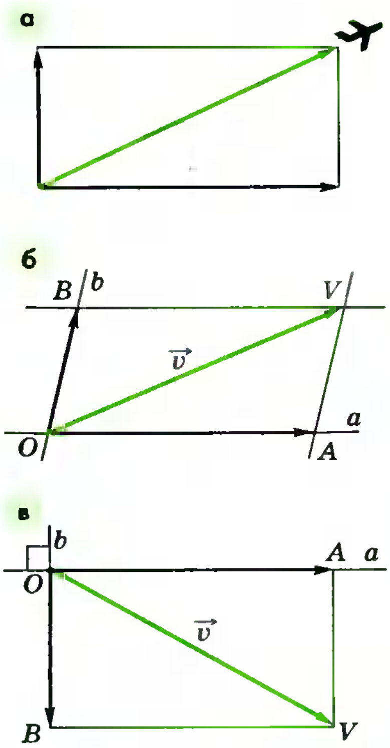


Рис. 269

параллельные им прямые. Вместе с прямыми a и b они ограничат параллелограмм $OAVB$ с диагональю OV. По правилу параллелограмма $\overrightarrow{OV} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$. Векторы $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$ и есть составляющие вектора $\vec{v}$, лежащие на прямых a и b.

Если вектор $\overrightarrow{OV}$ лежит на одной из прямых a или b, то его составляющая по этой прямой — это он сам. А по другой прямой его составляющая равна нулю.

Особенно важный случай представляет разложение на составляющие по взаимно перпендикулярным прямым. Тогда параллелограмм с диагональю OV — это прямоугольник, а его стороны — это проекции отрезка OV на прямые a и b (рис. 269, в).

1. В каком случае складывать векторы по правилу треугольника сложнее, чем по правилу параллелограмма? А наоборот?

2. Какие вы знаете свойства сложения векторов?

3. Какой вектор называется разностью двух векторов?

4. Какие два вектора называются противоположными?

5. Какими способами можно получить разность двух векторов?

6. Как разложить вектор по двум пересекающимся прямым?

Задачи к § 28

28.1. Докажите, что $|\vec{a} + \vec{b}| \leqslant |\vec{a}| + |\vec{b}|$. При каком положении векторов достигается здесь равенство?

28.2. Докажите, что $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{XB} - \overrightarrow{XA}$ для любой точки X.

28.1 **28.3.** Нарисуйте два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. От точки O отложите $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, затем $\overrightarrow{AB} = \vec{b}$. Нарисуйте сумму $\vec{a} + \vec{b}$. От точки O_1 отложите $\overrightarrow{O_1A_1} = \vec{b}$, а затем $\overrightarrow{A_1B_1} = \vec{a}$. Нарисуйте сумму $\vec{b} + \vec{a}$. Объясните, почему $\overrightarrow{O_1B_1} = \overrightarrow{OB}$.

28.4. Нарисуйте треугольник ABC. Нарисуйте векторы: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$; в) $\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$; г) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}$; д) $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}$. е) Суммой каких векторов, заданных вершинами треугольника ABC, является вектор $\overrightarrow{CB}$?

28.5. Нарисуйте параллелограмм $ABCD$. Нарисуйте: а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$; в) $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA}$; г) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD}$; д) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA}$; е) $\overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AC}$; ж) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}$; з) $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$.

28.6. Нарисуйте параллелограмм $ABCD$. Суммой каких векторов, заданных вершинами параллелограмма, являются векторы: а) $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{CA}$; в) $\overrightarrow{BD}$; г) $\overrightarrow{DA}$; д) $\overrightarrow{DC}$?

28.7. Самолет пролетел 200 км на юго-запад, а затем 300 км на запад. Сделайте соответствующий рисунок, используя векторы. На каком расстоянии он оказался от начальной точки? Придумайте сами похожую задачу.

28.8. Нарисуйте на плоскости любые три точки A, B, C. Объясните, почему $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA}$. Какие еще аналогичные векторные суммы, используя эти точки, можно записать? Можете ли вы при этом обойтись без рисунка?

28.9. Нарисуйте четыре точки на плоскости: A, B, C, D. Докажите, что $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC}$. Составьте аналогичные равенства.

28.2 **28.10.** Нарисуйте два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Нарисуйте точку O. От точки O отложите $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{OC} = \vec{a} + \vec{b}$. От другой точки O_1 отложите $\overrightarrow{O_1A_1} = \vec{a}$, $\overrightarrow{O_1B_1} = \vec{b}$ и $\overrightarrow{O_1C_1} = \vec{a} + \vec{b}$. Объясните, почему $\overrightarrow{O_1C_1} = \overrightarrow{OC}$.

28.11. Нарисуйте треугольник ABC. Постройте по правилу параллелограмма векторы: а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}$; в) $\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BA}$.

28.12. Нарисуйте параллелограмм $ABCD$. Постройте по правилу параллелограмма векторы: а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}$; в) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$; г) $\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CA}$.

28.13. Нарисуйте три прямые a, b, c, проходящие через одну точку O и образующие друг с другом углы по 60°.

а) От точки O отложите на прямой a вектор $\vec{a}$. Постройте на прямых b и c такие векторы $\vec{b}$ и $\vec{c}$, что $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$.

б) От точки O отложите на прямой b вектор $\vec{b}$. Постройте на прямых a и c такие векторы $\vec{a}$ и $\vec{c}$, что $\vec{a}=\vec{b}+\vec{c}$.

28.14. Вертолет летел на север со скоростью v_1. Вдруг поднялся западный ветер и начал дуть со скоростью v_2.

а) Сделайте рисунок.

б) При каком соотношении между скоростями v_1 и v_2 вертолет будет лететь на северо-восток?

в) Как вычислить угол, на который он отклонился?

г) С какой скоростью полетит вертолет теперь, выдерживая по компасу прежний курс?

28.3 **28.15.** Нарисуйте четырехугольник $ABCD$. Нарисуйте векторы: а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}$; в) $\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AB}$; г) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CB}$; д) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CD}$; е) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DB}+\overrightarrow{CB}$; ж) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DC}$.

28.16. Можете ли вы без рисунка назвать сумму этих векторов: а) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}$; б) $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RS}+\overrightarrow{QR}$; в) $\overrightarrow{KL}+\overrightarrow{LN}+\overrightarrow{NK}$?

28.17. Из одной точки выходят три вектора равной длины и один из них равен сумме двух других. Нарисуйте.

28.18. Дайте векторное истолкование ситуации, описанной в басне И. А. Крылова про лебедя, рака и щуку.

28.4 **28.19.** Нарисуйте два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

а) От точки O отложите $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$. Нарисуйте $\vec{a}-\vec{b}$.

б) От точки O_1 отложите $\overrightarrow{O_1A_1}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{O_1B_1}=\vec{b}$. Нарисуйте $\vec{b}-\vec{a}$.

28.20. Нарисуйте треугольник ABC. Нарисуйте векторы:

а) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$; в) $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{BC}$; г) $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{CB}$; д) $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{AC}$; е) $\overrightarrow{BA}-\overrightarrow{CA}$.

28.21. Нарисуйте параллелограмм $ABCD$. Нарисуйте векторы: а) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}$; б) $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB}$; в) $\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{BA}$; г) $\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{DA}$; д) $\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{AD}$; е) $\overrightarrow{DB}-\overrightarrow{DA}$; ж) $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD}$.

28.22. Нарисуйте систему координат. Пусть $\vec{i}$ — единичный вектор оси x, а $\vec{j}$ — единичный вектор оси y. Нарисуйте: а) $\vec{i}+\vec{j}$; б) $\vec{i}-\vec{j}$; в) $-\vec{i}+\vec{j}$; г) $-\vec{i}-\vec{j}$.

28.5 **28.23.** Нарисуйте параллелограмм $ABCD$. Рассмотрите векторы, заданные его вершинами. Нарисуйте $\overrightarrow{AB}$. Укажите вектор, противоположный $\overrightarrow{AB}$. Укажите другие пары противоположных векторов.

28.24. Нарисуйте вектор. Постройте вектор, ему противоположный.

28.25. Не рисуя, назовите вектор, противоположный вектору: а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{BA}$; в) $\overrightarrow{PQ}$.

28.26. Вернитесь к задаче 28.20. В г), д), е) выполните вычитание с помощью противоположных векторов.

28.27. Вернитесь к задаче 28.21. В в), г), д), ж) выполните вычитание с помощью противоположных векторов.

28.28. Выразите вектор $\vec{x}$ из равенств: а) $\vec{a}+\vec{x}=\vec{b}$; б) $\vec{a}-\vec{x}=\vec{b}$; в) $\vec{x}-\vec{a}=\vec{b}$; г) $\vec{x}+\vec{a}=\vec{0}$.

28.29. Нарисуйте иллюстрации к таким векторным равенствам:

а) $-(\vec{a}+\vec{b})=-\vec{a}-\vec{b}$; б) $-(\vec{a}-\vec{b})=-\vec{a}+\vec{b}$; в) $(\vec{a}-\vec{b})+\vec{c}=(\vec{a}+\vec{c})-\vec{b}=(\vec{c}-\vec{b})+\vec{a}$.

28.30. Пусть $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$. Докажите, что для любой точки O верно равенство $\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OD}$. Верно ли обратное?

28.6 **28.31.** Нарисуйте систему координат.

а) Нарисуйте вектор $\overrightarrow{OA}$ и его составляющие по осям x и y.

б) Нарисуйте вектор $\overrightarrow{OA}$ так, чтобы его горизонтальная составляющая была длиннее вертикальной.

в) Нарисуйте вектор $\overrightarrow{OA}$ так, чтобы его составляющие по осям x и y были равной длины.

г) Нарисуйте вектор $\overrightarrow{OA}$ так, чтобы его составляющая по одной из осей была равна нуль-вектору.

28.32. Нарисуйте систему координат и вектор $\overrightarrow{OA}$ на оси x. Нарисуйте несколько векторов, у которых горизонтальная составляющая равна $\overrightarrow{OA}$. Нарисуйте вертикальные составляющие этих векторов.

28.33. Нарисуйте параллелограмм $ABCD$. Пусть точка K — середина стороны BC, точка M — середина стороны CD. Нарисуйте составляющие по прямым AB и AD векторов: а) $\overrightarrow{AK}$; б) $\overrightarrow{AM}$; в) $\overrightarrow{DK}$; г) $\overrightarrow{BM}$; д) $\overrightarrow{KM}$.

28.34. а) Может ли длина одной из составляющих вектора быть больше длины его самого?

б) Могут ли длины обеих составляющих вектора быть больше длины самого вектора?

§ 29 Умножение вектора на число

29.1 **Определение умножения вектора на число.** Определив сложение любых двух векторов, мы теперь можем рассмотреть суммы вида $\vec{a}+\vec{a}$, $\vec{a}+\vec{a}+\vec{a}$ и т. д. Такие суммы, как и в алгебре, естественно обозначить $2\vec{a}$, $3\vec{a}$ и т. д. *(рис. 270)*.

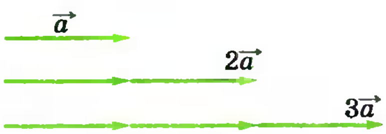


Рис. 270

Уже этот простейший пример показывает, что удобно ввести операцию умножения вектора на число, и подсказывает, как дать соответствующее определение.

Определение. Произведением вектора $\vec{a}\neq\vec{0}$ и числа $x\neq0$ называется такой вектор $x\vec{a}$, для которого выполняются два условия: 1) его длина равна произведению длины вектора $\vec{a}$ на модуль числа x, т. е.

$$|x\vec{a}|=|x||\vec{a}|; \qquad (1)$$

2) он сонаправлен с вектором $\vec{a}$, если $x>0$, и направлен противоположно вектору $\vec{a}$, если $x<0$ *(рис. 271)*.

Если же $\vec{a}=\vec{0}$ или $x=0$, то вектор $x\vec{a}$ по определению нулевой (что согласуется с (1)).

Из данного определения непосредственно вытекают такие следствия:

1. $1\cdot\vec{a}=\vec{a}$ для любого вектора $\vec{a}$.
2. $(-1)\vec{a}=-\vec{a}$ для любого вектора $\vec{a}$.
3. Если $x\vec{a}=\vec{0}$, то либо $x=0$, либо $\vec{a}=\vec{0}$.
4. Если $x\vec{a}=x\vec{b}$ и $x\neq0$, то $\vec{a}=\vec{b}$.
5. Если $x\vec{a}=y\vec{a}$ и $\vec{a}\neq\vec{0}$, то $x=y$.

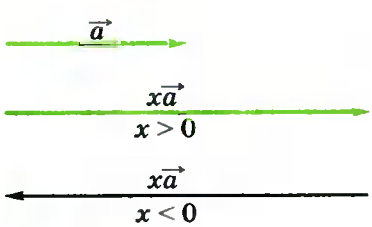


Рис. 271

• Докажем, например, последнее утверждение. Из равенства $x\vec{a}=y\vec{a}$ по формуле (1) получаем, что $|x||\vec{a}|=|y||\vec{a}|$. Так как $|\vec{a}|\neq0$, то $|x|=|y|$. Кроме того, числа x и y имеют один знак (в противном случае векторы $x\vec{a}$ и $y\vec{a}$ были бы направлены противоположно). Поэтому $x=y$.

29.2 **Характерное свойство коллинеарных векторов.** Из определения умножения вектора на число вытекает простой, но важный **признак** коллинеарности векторов.

Теорема 27 *(о коллинеарных векторах).* **Вектор $\vec{b}$ коллинеарен ненулевому вектору $\vec{a}$ тогда и только тогда, когда $\vec{b} = x\vec{a}$**

• **Доказательство.** 1) Если $\vec{b} = x\vec{a}$, то векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны (по определению действия умножения вектора на число).

2) Докажем теперь обратное утверждение: если $\vec{b} \parallel \vec{a}$, то найдется такое число x, что $\vec{b} = x\vec{a}$.

Если $\vec{b} = \vec{0}$, то $x = 0$. Если же $\vec{b} \neq \vec{0}$, то возможны два случая:

а) $\vec{b} \uparrow\uparrow \vec{a}$. Тогда, чтобы из $\vec{a}$ получить $\vec{b}$, надо умножить $\vec{a}$ на число $x = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$, т. е.

$$\vec{b} = \frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\,\vec{a}. \qquad (2)$$

б) $\vec{b} \downarrow\uparrow \vec{a}$. Тогда $\vec{b}$ получается из $\vec{a}$ умножением на число $x = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}$, т. е.

$$\vec{b} = -\frac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}\,\vec{a}. \qquad (3)$$

Оба эти равенства вытекают непосредственно из определения операции умножения вектора на число. Убедитесь в этом сами.

Рис. 272

Следствие *(о векторах на прямой).* **Два вектора, отложенные от одной и той же точки, лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда один из них получается из другого умножением на число.**

Другими словами, точка X лежит на прямой AB тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{AX} = x\overrightarrow{AB}$ *(рис. 272)*.

?

1. Как умножить ненулевой вектор на ненулевое число?
2. Какие свойства действия умножения вектора на число вам известны?
3. Какое характерное свойство коллинеарных векторов вы узнали?

Задачи к § 29

29.1 **29.1.** Нарисуйте $\vec{a}$. Постройте векторы $2\vec{a}$, $-3\vec{a}$, $\frac{1}{4}\vec{a}$, $-\frac{1}{2}\vec{a}$.

29.2. Нарисуйте систему координат. Пусть $\vec{i}$, $\vec{j}$ — единичные векторы на осях x и y. Постройте векторы: а) $2\vec{i} + \vec{j}$; б) $-\vec{i} + 2\vec{j}$; в) $2\vec{i} - 3\vec{j}$; г) $-\frac{1}{2}\vec{i} - \frac{3}{2}\vec{j}$.

29.3. Выразите вектор $\vec{b}$ из равенства: а) $\vec{a}=2\vec{b}$; б) $\vec{a}=-3\vec{b}$; в) $\vec{a}=\frac{2}{3}\vec{b}$; г) $\vec{a}=-5{,}5\vec{b}$.

29.4. Дан параллелограмм $ABCD$. Точка O — точка пересечения его диагоналей. Пусть $\overrightarrow{AC}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{BD}=\vec{b}$. Выразите через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторы $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{OD}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$.

29.2 **29.5.** На отрезке AB длиной 20 см лежит точка C, причем $AC=15$ см. Выразите: а) вектор $\overrightarrow{AC}$ через вектор $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{AB}$ через $\overrightarrow{CA}$; в) $\overrightarrow{BC}$ через $\overrightarrow{AC}$.

29.6. На отрезке PQ взята точка X, такая, что $PX:XQ=2:1$. Выразите: а) $\overrightarrow{PX}$ через $\overrightarrow{PQ}$; б) $\overrightarrow{QX}$ через $\overrightarrow{XP}$; в) $\overrightarrow{PQ}$ через $\overrightarrow{QX}$. Сделайте то же, если $PX:XQ=2:3$.

29.7. На отрезке AB взята точка T, такая, что $AT:TB=t$. Выразите: а) $\overrightarrow{AT}$ через $\overrightarrow{TB}$; б) $\overrightarrow{AT}$ через $\overrightarrow{AB}$; в) $\overrightarrow{TB}$ через $\overrightarrow{AB}$; г) $\overrightarrow{TA}$ через $\overrightarrow{TB}$.

29.8. Пусть A и B — две данные точки. Какую фигуру образуют все точки X, такие, что: а) $\overrightarrow{AX}=t\overrightarrow{AB}$, где $0\leqslant t\leqslant 1$; б) $\overrightarrow{BX}=t\overrightarrow{BA}$, где $0\leqslant t\leqslant 1$; в) $\overrightarrow{AX}=t\overrightarrow{AB}$, где $t\geqslant 0$; г) $\overrightarrow{BX}=t\overrightarrow{BA}$, где $t\geqslant 0$; д) $\overrightarrow{AX}=t\overrightarrow{AB}$, где $t\leqslant 0$; е) $\overrightarrow{AX}=t\overrightarrow{AB}$, где $|t|\leqslant 1$.

§ 30 Проекция вектора на ось

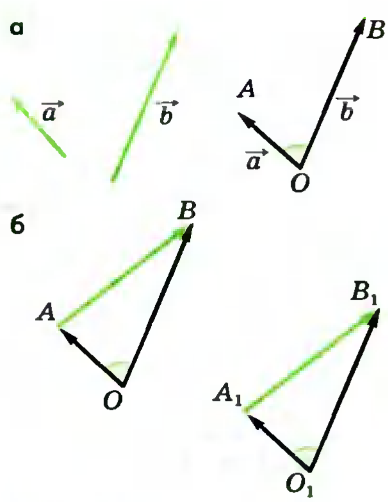


Рис. 273

30.1 Угол между ненулевыми векторами. Угол между ненулевыми векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется следующим образом. Их надо отложить от одной точки O (*рис. 273, а*): $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, а затем найти величину угла между лучами OA и OB. Ее и называют углом между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и обозначают: $\angle\vec{a}\vec{b}$.

Итак, **углом между** двумя ненулевыми **векторами** называется величина образуемого ими угла, когда они отложены от одной точки. Если векторы сонаправлены, то угол между ними считается равным 0°. Если векторы направлены противоположно, то угол между ними равен 180°.

Угол между векторами не зависит от выбора той точки, от которой они откладываются. Доказать это надо лишь для неколлинеарных векторов, так как для сонаправленных и противоположно направленных векторов это вытекает из данного определения.

• Возьмем два неколлинеарных вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Отложим их от точки O (*рис. 273, б*): $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ — и от точки O_1: $\overrightarrow{O_1A_1}=\vec{a}$, $\overrightarrow{O_1B_1}=\vec{b}$. Тогда $\overrightarrow{A_1B_1}=\overrightarrow{O_1B_1}-\overrightarrow{O_1A_1}=\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{AB}$. Поэтому стороны треугольников OAB и $O_1A_1B_1$ соответственно равны. Значит, равны и соответственные углы этих треугольников, в том числе и $\angle AOB=\angle A_1O_1B_1$.

30.2 Определение проекции вектора на ось. При рассмотрении векторной величины нас может интересовать не столько она сама, сколько ее составляющая в некотором направлении. Так, при взлете и посадке самолета особенно важна вертикальная составляющая его перемещения, а в остальное время полета важнее горизонтальная (*рис. 269, а*). Такие составляющие находят проектировани-

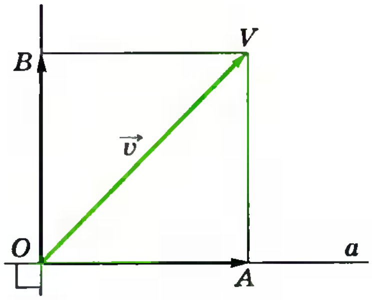


Рис. 274

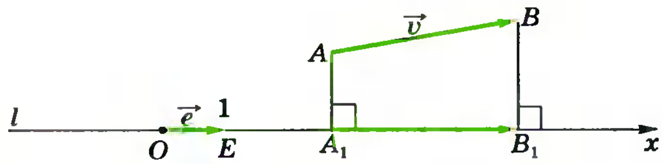


Рис. 275

ем вектора на взаимно перпендикулярные прямые (рис. 274). Только о таких составляющих мы теперь и говорим.

Если на прямой, на которую проектируется вектор, ввести координату, то составляющую вектора по этой прямой удобно задать числом. Это число называют проекцией вектора на ось. Дадим определение.

Пусть задана **координатная ось** x (рис. 275), т. е. прямая l, на которой выбраны точка O — начало координат, направление и точка E, координата которой равна 1. Тогда каждой точке M прямой l соответствует некоторая координата x. Единичный вектор $\vec{e}=\overrightarrow{OE}$ назовем единичным вектором оси x. (Вообще **единичным** называется **вектор**, длина которого равна 1.)

Возьмем любой вектор $\vec{v}$ и отложим его от некоторой точки A, т. е. $\overrightarrow{AB}=\vec{v}$. Спроектируем точки A и B на ось x. Получим точки A_1, B_1 и составляющую $\overrightarrow{A_1B_1}$ вектора $\overrightarrow{AB}$ по оси x. Ее длина со знаком «плюс» или «минус» и называется проекцией вектора $\vec{v}$ на ось x.

Определение. Проекцией v_x **вектора** $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ на ось x называется длина его составляющей $\overrightarrow{A_1B_1}$ по этой оси, взятая со знаком «плюс» или «минус». При этом берется знак «плюс», если направление вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ совпадает с направлением оси x, и знак «минус», если эти направления противоположны.

Если $\overrightarrow{A_1B_1}=\vec{0}$, т. е. $A_1=B_1$, то $v_x=0$.

Итак, $$v_x=\begin{cases} +|\overrightarrow{A_1B_1}|, \text{ если } \overrightarrow{A_1B_1}\uparrow\uparrow\vec{e}; \\ -|\overrightarrow{A_1B_1}|, \text{ если } \overrightarrow{A_1B_1}\downarrow\uparrow\vec{e}; \\ 0, \text{ если } \overrightarrow{A_1B_1}=\vec{0}, \text{ т. е. } A_1=B_1. \end{cases}$$

Обратите внимание, что проекция точки — точка, проекция отрезка — отрезок (или точка), а проекция вектора — число.

Вектор $\overrightarrow{A_1B_1}$ получается из коллинеарного ему единичного вектора $\vec{e}$ умножением на $\pm|\overrightarrow{A_1B_1}|$. При этом если $\overrightarrow{A_1B_1}\uparrow\uparrow\vec{e}$, то $\overrightarrow{A_1B_1}=|\overrightarrow{A_1B_1}|\,\vec{e}$. Если же $\overrightarrow{A_1B_1}\downarrow\uparrow\vec{e}$, то $\overrightarrow{A_1B_1}=-|\overrightarrow{A_1B_1}|\vec{e}$. Следовательно, имеет место равенство

$$\overrightarrow{A_1B_1}=v_x\vec{e}. \qquad (1)$$

30.3 Вычисление проекции вектора на ось. Мы укажем два способа вычисления проекции вектора.

1. Вычисление проекции с помощью координат. По определению проекция v_x вектора $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$ на ось x равна длине его составляющей $\overrightarrow{A_1B_1}$ по этой оси, взятой со знаком «плюс» или «минус». Но длина ненулевого вектора $\overrightarrow{A_1B_1}$ — это длина отрезка A_1B_1, т. е. расстояние между точками A_1, B_1.

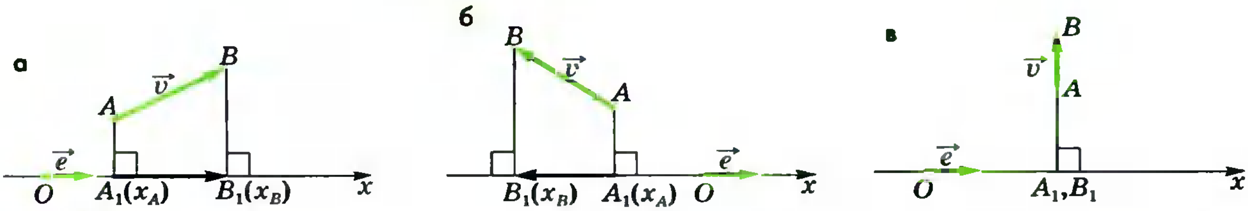


Рис. 276

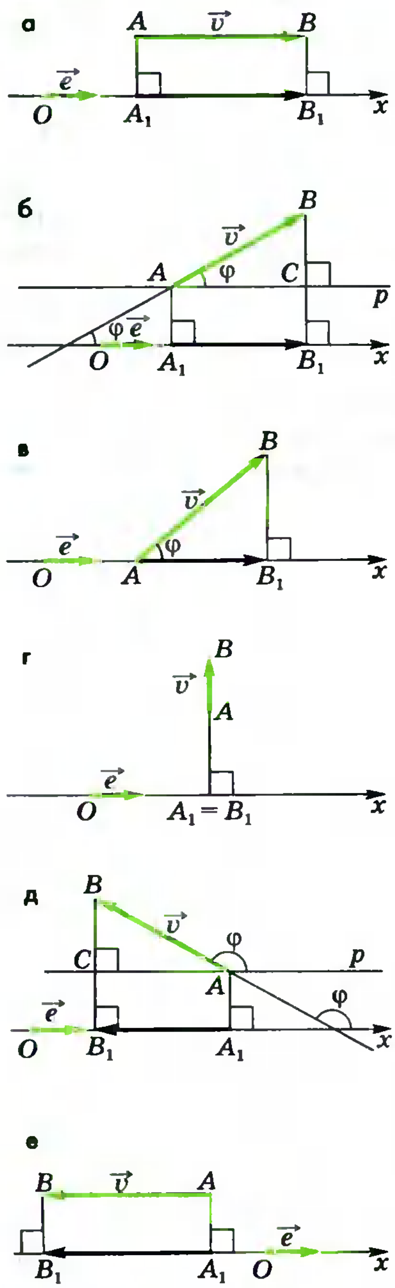


Рис. 277

Как вам известно из курса математики 6 класса, это расстояние можно найти, зная координаты x_A, x_B точек A_1, B_1, по формуле

$$A_1B_1 = |x_B - x_A|. \tag{2}$$

Если $\overrightarrow{A_1B_1} \uparrow\uparrow \vec{e}$, то $x_B > x_A$ (рис. 276, а) и $x_B - x_A > 0$. В этом случае $|x_B - x_A| = x_B - x_A$ и $v_x = |\overrightarrow{A_1B_1}| = A_1B_1 = x_B - x_A$.

Если же $\overrightarrow{A_1B_1} \downarrow\uparrow \vec{e}$, то $x_B < x_A$ (рис. 276, б) и $x_B - x_A < 0$. В этом случае $|x_B - x_A| = -(x_B - x_A)$ и $v_x = -|\overrightarrow{A_1B_1}| = -A_1B_1 = x_B - x_A$.

Если же $\overrightarrow{A_1B_1} = \vec{0}$, то $v_x = 0$, $A_1 = B_1$, $x_B = x_A$ и снова $v_x = x_B - x_A$ (рис. 276, в).

Итак, для всех случаев доказано важное равенство

$$v_x = x_B - x_A. \tag{3}$$

2. Вычисление проекции с помощью угла между вектором и осью. **Углом между вектором и координатной осью** называется угол между вектором и единичным вектором этой оси. Второй способ вычисления проекции вектора дает следующая

Лемма *(о проекции вектора)*. **Проекция ненулевого вектора на ось равна длине этого вектора, умноженной на косинус угла между вектором и осью.**

Дано: вектор $\vec{v} = \overrightarrow{AB} \neq \vec{0}$, $\vec{e}$ — единичный вектор координатной оси x, $\varphi = \angle \vec{v}\vec{e}$ (φ — греческая буква «фи»).

Доказать: $v_x = |\vec{v}| \cos \varphi$. (4)

• **Доказательство.** Возможны следующие случаи:

1) Угол $\varphi = 0°$ (рис. 277, а). Тогда $\overrightarrow{AB} \uparrow\uparrow \vec{e}$, $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB} = \vec{v}$ и $v_x = |\vec{v}|$. Так как $\cos 0° = 1$, то (4) выполняется.

2) Угол φ острый (рис. 277, б). Пусть точка A не лежит на оси x. Через точку A проведем прямую p, параллельную оси x. Пусть точка C — проекция точки B на прямую p. Получим прямоугольный треугольник ABC с углом φ при вершине A и прямоугольник AA_1B_1C. Тогда

$$v_x = |\overrightarrow{A_1B_1}| = AC = AB \cos \varphi = |\vec{v}| \cos \varphi,$$

т. е. (4) выполняется в рассматриваемом случае. Если же точка A лежит на оси x, то (4) вытекает из прямоугольного треугольника ABB_1 (рис. 277, в).

3) Угол $\varphi = 90°$. В этом случае $\overrightarrow{AB} \perp \vec{e}$, $A_1 = B_1$ и $v_x = 0$. И так как $\cos 90° = 0$, то (4) и в этом случае выполняется (рис. 277, г).

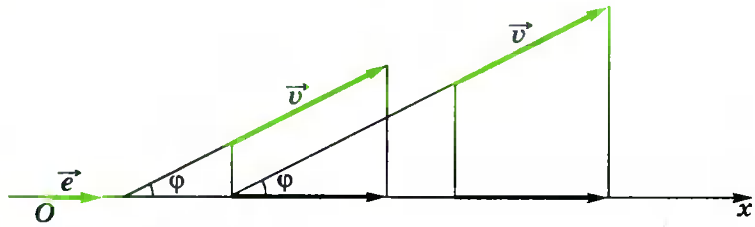


Рис. 278

4) Угол φ тупой. Снова через точку A проводим прямую p, параллельную оси x, и проектируем на нее точку B в точку C (рис. 277, д). Снова получим прямоугольный треугольник ABC. Его угол при вершине A равен $180° - \varphi$. Поэтому $AC = AB\cos(180° - \varphi) = -AB\cos\varphi$. В рассматриваемом случае $\overrightarrow{A_1B_1} \downarrow\uparrow \vec{e}$, и потому

$$v_x = -|\overrightarrow{A_1B_1}| = -AC = AB\cos\varphi = |\vec{v}|\cos\varphi,$$

т. е. снова выполняется (4). Если точка A лежит на прямой x, то доказательство лишь упрощается.

5) Угол $\varphi = 180°$. Тогда $\overrightarrow{AB} \downarrow\uparrow \vec{e}$ (рис. 277, е), $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{AB} = \vec{v}$ и $v_x = -|\vec{v}|$. Так как $\cos 180° = -1$, то (4) снова имеет место.

30.4 Свойства проекций векторов на ось.

Свойство 1. Равные векторы имеют равные проекции на заданную ось.

• **Доказательство.** По лемме о проекции вектора проекция вектора на ось зависит лишь от длины вектора и угла, который он образует с данной осью. Равные же векторы имеют, во-первых, равные длины, а во-вторых, образуют с осью один и тот же угол (рис. 278). Следовательно, их проекции на ось равны.

Тем самым мы установили, что проекция вектора на ось не зависит от точки откладывания вектора.

Свойство 2. При сложении векторов их проекции на ось складываются (рис. 279).

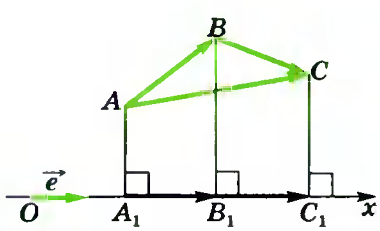


Рис. 279

• **Доказательство.** Сложим любые два вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ и $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. Пусть точки A_1, B_1, C_1 — проекции точек A, B, C на ось x и x_A, x_B, x_C — их координаты. Так как $a_x = x_B - x_A$, $b_x = x_C - x_B$, то $a_x + b_x = x_B - x_A + x_C - x_B = x_C - x_A$. С другой стороны, $c_x = x_C - x_A$. Поэтому $c_x = a_x + b_x$.

Свойство 3. При умножении вектора на число его проекция умножается на это число.

• **Доказательство.** Пусть x — ось с начальной точкой O и единичным вектором $\vec{e}$. Возьмем любой вектор $\vec{a}$ и отложим его от точки O, т. е. $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$ (рис. 280). Пусть φ — угол между $\vec{a}$ и $\vec{e}$. Умножим вектор $\vec{a}$ на число α. Получим вектор $\vec{b} = \overrightarrow{OB} = \alpha\vec{a}$. Мы хотим доказать, что $b_x = \alpha a_x$.

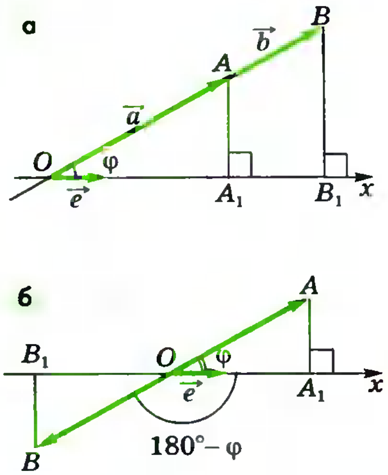


Рис. 280

Возможны следующие случаи:

1) $\alpha > 0$ *(рис. 280, а)*. Тогда $\angle \vec{b}\vec{e} = \varphi$. Кроме того, $|\vec{b}| = |\alpha|\ |\vec{a}|$, т. е. $OB = \alpha OA$. Поэтому

$$b_x = |\vec{b}| \cos\varphi = OB \cos\varphi = \alpha OA \cos\varphi = \alpha a_x.$$

2) $\alpha < 0$ *(рис. 280, б)*. В этом случае $\angle \vec{b}\vec{e} = 180° - \varphi$. Кроме того, $|\vec{b}| = |\alpha|\ |\vec{a}|$, т. е. $OB = |\alpha| OA$. А так как $\alpha < 0$, то $|\alpha| = -\alpha$, и потому $OB = -\alpha OA$.

Следовательно,

$$b_x = |\vec{b}| \cos(180° - \varphi) = -OB \cos\varphi = \alpha OA \cos\varphi = \alpha a_x.$$

3) Если $\alpha = 0$, то $\vec{b} = \alpha\vec{a} = \vec{0}$, и потому $b_x = 0$ и $b_x = \alpha a_x$.

1. **В чем разница между проекциями вектора и отрезка?**
2. **Как можно вычислять проекцию вектора?**
3. **Какие вы знаете свойства проекций?**

Задачи к § 30

30.1. Запишите формулу (4).
а) Как найти из нее длину вектора, угол между вектором и осью?
б) Зафиксируйте одну из величин, входящих в (4). Пусть другая из этих величин стала изменяться, например увеличиваться. Что будет происходить с третьей?
в) В каких границах изменяется проекция вектора заданной длины на ось при изменении угла?

30.1 **30.2.** Найдите величины углов между векторами $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BA}$ и $\overrightarrow{CA}$ для следующих треугольников ABC: а) равностороннего; б) прямоугольного с $\angle C = 90°$ и $AC = BC$; в) имеющего $\angle A = 50°$ и $\angle B = 30°$; г) имеющего $\angle A = 70°$ и $AC = AB$; д) имеющего $\angle A = \varphi_1$ и $\angle B = \varphi_2$.

30.3. Нарисуйте единичные векторы, образующие угол 30°: а) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{BD}$; в) $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{XY}$, X — любая точка. Сделайте то же для угла 140°.

30.4. Нарисуйте вектор. От его начала и конца отложите векторы равной длины, образующие с данным вектором один и тот же угол. Будут ли равны эти векторы?

30.5. Нарисуйте вектор $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$. Нарисуйте по разные стороны от прямой OA два вектора $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ и $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ так, что: а) $\angle \vec{b}\vec{a} = 30°$, $\angle \vec{c}\vec{a} = 50°$; б) $\angle \vec{b}\vec{a} = 100°$, $\angle \vec{c}\vec{a} = 120°$; в) $\angle \vec{b}\vec{a} = \varphi_1$, $\angle \vec{c}\vec{a} = \varphi_2$. Найдите угол между $\vec{b}$ и $\vec{c}$.

30.6. Нарисуйте три вектора на плоскости так, что угол между каждой парой один и тот же. Чему равен этот угол?

30.2 **30.7.** При каком угле между вектором и осью проекция вектора на эту ось: а) положительна; б) отрицательна; в) равна нулю?

30.8. а) Могут ли разные векторы иметь одну и ту же проекцию на данную ось?
б) Верно ли, что больший по длине вектор имеет бóльшую проекцию на данную ось?

30.3 **30.9.** Пусть даны точки A (1, 0), B (2, 0), C (−1, −1), D (−5, −4). Вычислите проекции на ось x и на ось y векторов: а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{CD}$; г) $\overrightarrow{DA}$.

30.10. Нарисуйте в системе координат вектор, проекция которого на ось x равна: а) 2; б) 0; в) −3. Чему равна проекция построенного вами вектора на ось y?

30.11. Нарисуйте систему координат и вектор длиной 1 с началом в точке O. Вычислите проекцию этого вектора на ось x, если угол между вектором и осью x равен: а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 120°; д) 135°; е) 150°.

30.12. Вычислите длину вектора, если его проекция на ось x равна 1, а его угол с осью x равен: а) 30°; б) 135°. Чему равна проекция этого вектора на ось y?

30.13. Какой угол образует вектор единичной длины с осью, если его проекция на ось равна: а) $-0{,}5$; б) 0; в) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) 1?

30.14. Вершины квадрата $ABCD$ имеют следующие координаты: A (0,0), B (1,0), C (1,1), D (0,1). Вычислите проекцию на ось x векторов $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CD}$, $\overrightarrow{DA}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DB}$, $\overrightarrow{CK}$, $\overrightarrow{BK}$ (K — точка пересечения диагоналей квадрата).

30.15. В прямоугольном треугольнике ABC гипотенуза AB равна 1, а $\angle B = 30°$. Чему равны проекции: а) $\overrightarrow{AB}$ на ось CA; б) $\overrightarrow{AB}$ на ось CB; в) $\overrightarrow{BC}$ на ось CB; г) $\overrightarrow{BC}$ на ось CA; д) $\overrightarrow{AC}$ на ось BA; е) $\overrightarrow{BC}$ на ось BA?

30.16. Сторона равностороннего треугольника ABC равна 1. Чему равна проекция на ось AC вектора: а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{CK}$, где точка K — середина AB?

30.4 **30.17.** Пусть проекция вектора $\vec{a}$ на ось x равна 2, проекция вектора $\vec{b}$ на ось x равна -3, проекция вектора $\vec{c}$ на ось x равна 4. Нарисуйте такие векторы. Чему равна проекция на ось x вектора: а) $-2\vec{a}$; б) $\vec{b}+\vec{c}$; в) $\vec{c}-\vec{a}$; г) $3\vec{a}-0{,}5\vec{b}$; д) $-\vec{a}+2\vec{b}-2\vec{c}$?

30.18. Пусть вектор $\vec{a}$ длиной 1 образует с осью x угол 30°, а вектор $\vec{b}$ длиной 2 образует с осью x угол 135°. Чему равна проекция на ось x вектора: а) $2\vec{a}$; б) $-3\vec{b}$; в) $\vec{a}+\vec{b}$; г) $\vec{b}-\vec{a}$; д) $0{,}5\vec{a}-3\vec{b}$; е) $-2\vec{a}+0{,}25\vec{b}$?

30.19. Нарисуйте систему координат. Чему равна проекция на ось x таких векторов: а) $\vec{i}+\vec{j}$; б) $\vec{i}-\vec{j}$; в) $-\vec{i}+\vec{j}$; г) $-\vec{i}-\vec{j}$; д) $2\vec{i}-3\vec{j}$; е) $-0{,}5\vec{i}+4\vec{j}$? Какой угол составляют эти векторы с осью x?

Итоги 8 класса

Если геометрия в 7 классе была прежде всего геометрией построений, то геометрия в 8 классе стала в основном геометрией вычислений: в главе IV речь идет главным образом о вычислении площадей многоугольных фигур, а в главе V — о решении треугольников, т. е. о вычислении неизвестных элементов треугольника по заданным его элементам. Решение треугольников потребовало изучения основ важного раздела математики — тригонометрии.

Геометрия вычислений, естественно, тесно связана с курсом алгебры. Доказательства многих теорем и решения значительной части задач сводятся к алгебраическим выкладкам.

Теорем в 8 классе стало больше — их 18. Основными из них являются четыре теоремы: теорема о площади треугольника (п. 18.2), теорема Пифагора (п. 20.1), теорема синусов (п. 23.3) и обобщенная теорема Пифагора (п. 25.1). Эти теоремы имеют разнообразные следствия. Так, из теоремы о площади треугольника следуют теоремы о площади трапеции (п. 18.4) и площади параллелограмма (п. 19.3), из теоремы Пифагора вытекают неравенство треугольника (п. 21.3) и характерное свойство биссектрисы угла (п. 21.5), из обобщенной теоремы Пифагора — теорема о средней линии треугольника (п. 25.3) и теорема о сравнении сторон и углов треугольника (п. 25.4).

Последняя глава курса 8 класса — глава VI «Векторы» — тесно связана с курсом физики и изучающимися в нем векторными величинами. Именно для этой главы важны теоремы о параллелограммах, доказанные в начале 8 класса.

9 класс

VII ГЛАВА Фигуры вращения

В этой главе будут изучены свойства окружности и круга. Наиболее важные ее результаты — вывод формул длины окружности и площади круга. Эти формулы получают, приближая круг близкими к нему многоугольниками. Поэтому в данной главе изучены и многоугольники, связанные с окружностью и кругом. В конце главы рассказано о важнейших пространственных фигурах вращения — сфере и шаре, цилиндре и конусе.

§ 31 Хорды и касательные

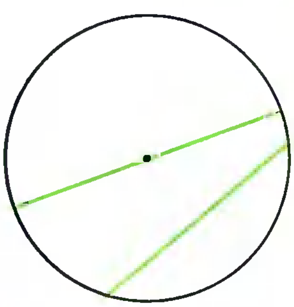


Рис. 281

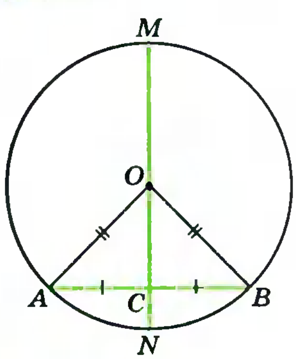


Рис. 282

31.1 Свойства хорд. Напомним, что отрезок, концы которого лежат на окружности, называется ее **хордой** *(рис. 281)*. Хорда, проходящая через центр окружности,— это ее **диаметр**. Перечислим несколько свойств хорд, в том числе и диаметра.

Свойство 1. Если диаметр проходит через середину хорды, не являющейся диаметром, то он перпендикулярен этой хорде.

• **Доказательство.** Пусть диаметр MN окружности с центром O проходит через середину C хорды AB *(рис. 282)*. Тогда OC — медиана равнобедренного треугольника OAB. Поэтому $OC \perp AB$, т. е. $MN \perp AB$.

Докажите самостоятельно обратное утверждение:

Свойство 2. Диаметр, перпендикулярный хорде, делит ее пополам *(рис. 283)*.

Так как середина хорды — это основание перпендикуляра, опущенного из центра окружности на хорду, то справедливо

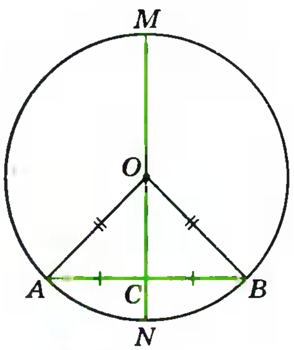


Рис. 283

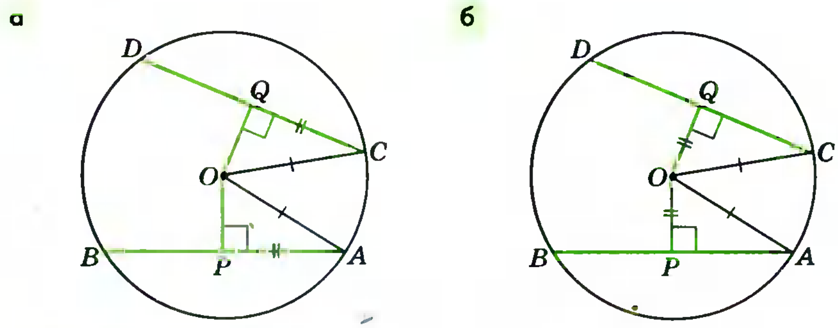


Рис. 284

Свойство 3. Расстояние от центра окружности до ее хорды — это расстояние от центра до середины хорды.

Свойство 4. В окружности равные хорды равноудалены от центра.

• **Доказательство.** Пусть в окружности с центром O хорды AB и CD равны, а точки P и Q — их середины *(рис. 284, а)*. Тогда прямоугольные треугольники OAP и OCQ равны (по гипотенузе и катету). Поэтому $OP=OQ$.

Докажите самостоятельно обратное утверждение:

Свойство 5. Хорды, равноудаленные от центра, равны *(рис. 284, б)*.

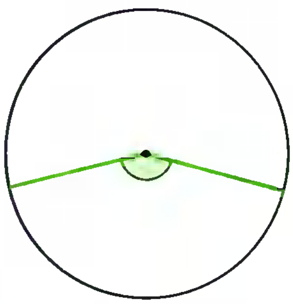


Рис. 285

Угол, вершина которого лежит в центре окружности, называется **центральным углом** *(рис. 285)*. Можно сказать, что центральный угол — это угол между радиусами окружности.

О хорде, соединяющей концы дуги, говорят, что она **стягивает** эту **дугу**, а также центральный угол, соответствующий этой дуге.

Свойство 6. Хорды, стягивающие равные центральные углы данной окружности, равны *(рис. 286, а)*.

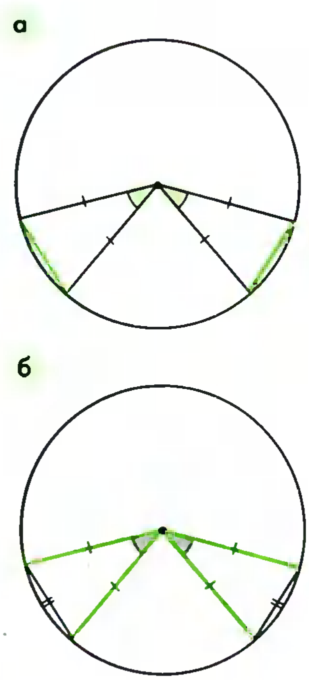


Рис. 286

Это вытекает из равенства треугольников по двум сторонам и углу между ними. Точно так же из равенства треугольников вытекает и утверждение, обратное свойству 6:

Свойство 7. Равные хорды данной окружности стягивают равные центральные углы *(рис. 286, б)*.

Эти два свойства можно сформулировать и так: **равные хорды видны из центра окружности под равными углами и наоборот.**

31.2 Касание прямой и окружности.

Касание прямой и окружности. Говорят, что **прямая и окружность касаются**, если они имеют единственную общую точку *(рис. 287)*. Такую прямую называют **касатель-**

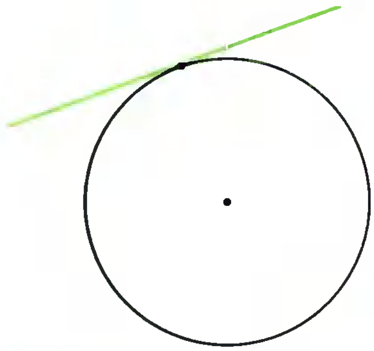


Рис. 287

ной, а их общую точку — **точкой касания.** В следующей теореме мы объединяем два взаимно обратных утверждения.

Теорема 28 (о касательной к окружности) **1) Если прямая касается окружности, то она перпендикулярна радиусу, проведенному в точку касания. 2) Прямая, проходящая через точку окружности и перпендикулярная ее радиусу, проведенному в эту точку, касается окружности.**

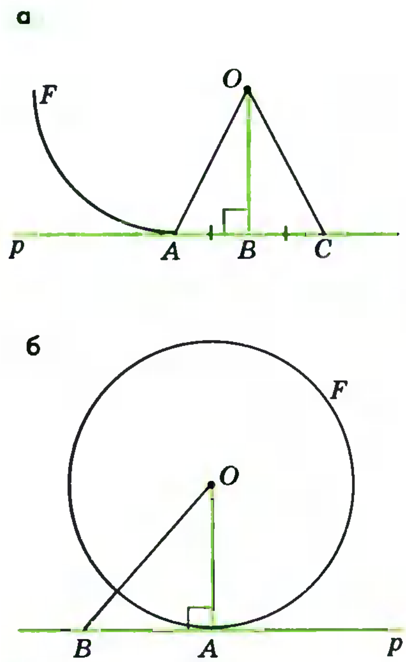


Рис. 288

• **Доказательство.** 1) *Свойства касательной.* Пусть прямая p касается окружности F в точке A, т. е. A — их единственная общая точка. Допустим, что p не перпендикулярна радиусу OA (рис. 288, а). Проведем перпендикуляр OB на p. Отложим на p отрезок $BC=BA$. Тогда $\triangle OBA=\triangle OBC$ (по двум катетам). Поэтому $OC=OA$. Значит, точка C лежит на F. Следовательно, p и F имеют две общие точки, что невозможно. Итак, $p\perp OA$.

2) *Признак касательной.* Возьмем любую точку A окружности F и проведем радиус OA (рис. 288, б). Затем проведем прямую p, пепендикулярную радиусу OA. Любая точка B прямой p, отличная от точки A, удалена от O больше чем на радиус, поскольку наклонная OB длиннее перпендикуляра OA. Поэтому точка B не лежит на F. Значит, точка A — единственная общая точка p и F, т. е. p касается F в точке A.

Теперь можно перечислить все возможные случаи взаимного расположения прямой и окружности (в зависимости от расстояния между центром окружности и прямой):

1) Если расстояние от центра окружности до прямой больше радиуса, то прямая и окружность не имеют общих точек (рис. 289, а).

2) Если расстояние от центра окружности до прямой равно радиусу, то прямая касается окружности (рис. 289, б).

3) Если расстояние от центра окружности до прямой меньше радиуса, то прямая пересекает окружность ровно в двух точках (рис. 289, в). (Подумайте, почему окружность и прямая не могут иметь более двух точек.)

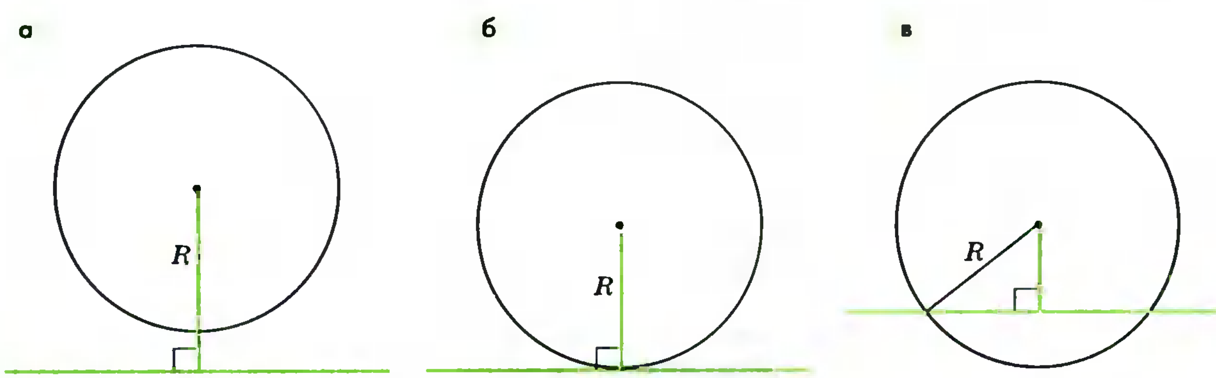


Рис. 289

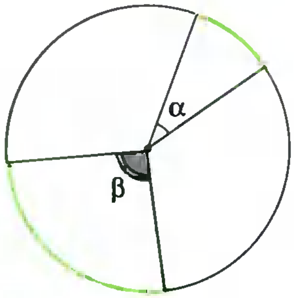


Рис. 290

31.3 **Градусная мера дуги окружности.** С градусным измерением дуг вы знакомы, например, из географии и знаете, что значит: точка на Земле имеет координаты, к примеру, 60° северной широты и 30° восточной долготы. В геометрии градусное измерение дуг определяется так. Между дугами некоторой окружности и ее центральными углами устанавливается взаимно однозначное соответствие: каждому центральному углу соответствует та дуга, которую этот угол «высекает» из окружности *(рис. 290)*, и наоборот.

Градусная мера дуги окружности определяется как градусная мера центрального угла, который соответствует этой дуге.

Вся окружность имеет градусную меру 360°, полуокружность — 180°, четверть окружности — 90°. Если дуга AB имеет градусную меру $\alpha°$, то пишут: $\smile AB=\alpha°$.

Две дуги одной окружности называют равными, если их градусные меры равны.

Рис. 291

31.4 **Вписанные углы.** Говорят, что угол **вписан в окружность**, если его вершина лежит на окружности, а его стороны пересекают окружность *(рис. 291)*. Говорят также, что вписанный угол **опирается** на дугу окружности, лежащую между его сторонами. Об измерении вписанных углов говорится в следующей теореме:

Теорема 29 *(о вписанном угле)*. **Угол, вписанный в окружность, измеряется половиной дуги, на которую он опирается.**

• **Доказательство.** Пусть угол ABC вписан в окружность, т. е. BA и BC — хорды окружности. Возможны три случая:

1) Центр O окружности лежит на одной из сторон угла ABC, например на стороне BC *(рис. 292, а)*. Проведем радиус OA и рассмотрим треугольник OAB. Он равнобедренный, так как $OB=OA$. Поэтому в нем $\angle A=\angle B$. А так как угол AOC внешний для треугольника OAB, то $\angle AOC=\angle A+\angle B=2\angle B$.

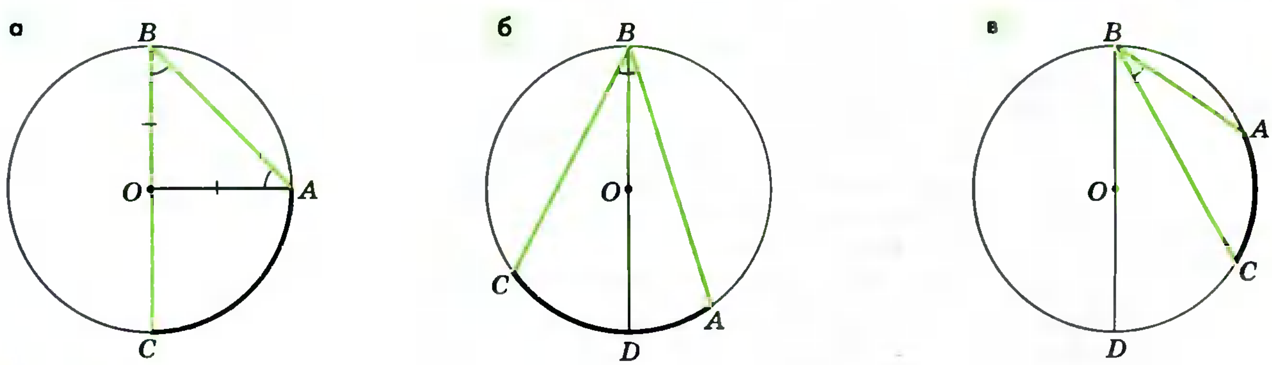


Рис. 292

Следовательно, $\angle B = \frac{1}{2}\angle AOC$. Но центральный угол AOC измеряется дугой AC. Значит, его половина — угол B — измеряется половиной дуги AC.

Для первого случая теорема доказана.

2) Центр O лежит внутри угла ABC (*рис. 292, б*). Тогда проведем диаметр BD и разобьем угол ABC на два угла: $\angle ABD$ и $\angle DBC$. Как уже доказано, угол ABD измеряется половиной дуги AD, а угол DBC — половиной дуги DC. Поэтому угол ABC — сумма углов ABD и DBC — измеряется полусуммой дуг AD и DC, т. е. половиной дуги AC, что и требовалось доказать.

3) Центр O лежит вне угла ABC (*рис. 292, в*). Снова проводим диаметр BD и рассматриваем угол ABC как разность получившихся вписанных углов. Проведите подробное доказательство для этого случая самостоятельно.

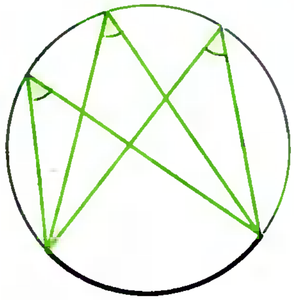


Рис. 293

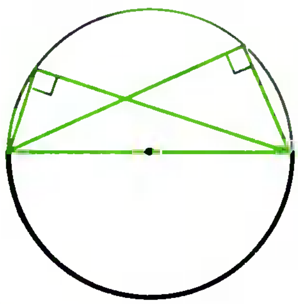


Рис. 294

Следствие 1. Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны (*рис. 293*).

Следствие 2. Вписанный угол, опирающийся на полуокружность (т. е. на диаметр), — прямой (*рис. 294*).

1. Какие вы знаете свойства хорд?
2. Что значит «прямая касается окружности»? Какое характерное свойство имеет касательная?
3. Перечислите случаи взаимного расположения прямой и окружности.
4. Как измеряется величина дуги окружности?
5. Какой зависимостью связаны вписанный угол и дуга, на которую он опирается?

Задачи к § 31

31.1. В круге проведена хорда. Рассмотрим такие величины: R — радиус круга, d —
31.1 длина хорды, h — расстояние от центра круга до хорды и φ — угол, под которым хорда видна из центра.

а) Известны R и h. Как найти d и φ?

б) Выберите любые две из величин. Пусть они известны. Как найти остальные?

31.2. В круге с радиусом 3 проведена хорда. На каком расстоянии она находится от центра и под каким углом она видна из центра, если длина хорды равна: а) 1; б) 2; в) 3? Как изменяются эти величины с увеличением длины хорды?

31.3. В окружности с радиусом 1 проведена хорда. Какова ее длина и расстояние от центра, если она видна из центра под углом: а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 90°; д) 120°; е) 135°; ж) 150°? Объясните, почему с увеличением этого угла длина хорды увеличивается, а расстояние до центра уменьшается. При каком угле длина хорды равна 1; больше 1; меньше 1? Может ли длина хорды быть меньше чем 0,1? меньше чем 0,01?

31.4. Пусть AB — хорда окружности с радиусом 2 и центром O, а x — расстояние от центра до хорды. Выразите площадь треугольника OAB как функцию $f(x)$. Вычислите значение $f(x)$ при $x = 1$.

Можете ли вы узнать, в каких границах лежит эта площадь?

31.5. Через точку A данной окружности проводят хорды.

а) Объясните, почему из A выходит не больше двух хорд заданной длины.

б) Пусть AB и AC — две равные хорды. Докажите, что хорда BC перпендикулярна диаметру, выходящему из A.

31.6. По окружности расставляют столбы на равных расстояниях друг от друга. Известны радиус круга и расстояние между соседними столбами. Как вычислить расстояние между столбами, идущими через один? между любыми столбами?

31.7. **31.2** Нарисуйте окружность F и точку A вне ее. Постройте касательные из A к F. Сколько таких касательных можно построить? Докажите, что их отрезки от A до точек касания с F равны.

31.8. Через точку A окружности с центром O и диаметром AB проходит касательная. На ней взята точка X.

а) Пусть $OA=1$, $XA=2$. Вычислите XO.

б) Составьте обратные задачи.

31.9. OA и OB — радиусы одной окружности. Через A и B проведены касательные до пересечения в точке C. Чему равен угол ACB, если угол AOB равен: а) $40°$; б) $90°$; в) $150°$; г) φ? Составьте обратную задачу.

31.10. Из точки A к окружности с радиусом R и центром O проведены две касательные. Они касаются окружности в точках B и C. Пусть $\angle BAC=\varphi$.

а) Как, зная R и AO, найти φ и BC?

б) Как, зная φ и AO, найти R?

в) Пусть AO возрастает, R постоянно. Как изменяется φ?

г) Пусть R растет, а AO постоянно. Как изменяется φ?

31.11. Через концы диаметра AB проведены две касательные к данной окружности. Докажите, что они параллельны.

31.12. В окружности с центром O проведена хорда AB. Через A проведена касательная AC к окружности. Чему равен острый угол BAC, если угол AOB равен: а) $50°$; б) $90°$; в) $130°$; г) φ? Какой вывод получается? Составьте обратные задачи.

31.13. В круге проведена хорда. Параллельно ей проведена касательная к его окружности. Как вычислить расстояние между хордой и касательной, если известны радиус R круга и длина d хорды? Чему они равны: а) если $R=2$ и $d=2$; б) в общем случае? Составьте обратные задачи.

31.14. а) Как узнать расстояние с мостика корабля до линии горизонта?

б) Как узнать, с какого расстояния с капитанского мостика увидят свет маяка?

31.15. **31.4** В окружности с радиусом R вписанный угол величиной φ опирается на хорду длиной d. Докажите, что $d=2R\sin\varphi$.

31.16. Найдите множество точек, из которых данный отрезок виден под данным углом. Выделите случай прямого угла.

31.17. Нарисуйте окружность. Отметьте на ней точки A, B, C. Нарисуйте треугольник ABC. Чему равны величины дуг окружности с концами в точках A, B, C, если: а) $\angle A=30°$, $\angle B=40°$; б) $\angle A=60°$, $\angle C=60°$; в) $\angle B=90°$, $\angle C=10°$; г) $\angle C=150°$, $\angle A=15°$; д) $\angle B=\varphi$, $\angle C=2\varphi$?

31.18. На окружности отмечены две точки A и B. На одной из двух полученных дуг взята точка X, а на другой — точка Y.

а) Пусть $\angle AXB=50°$. Вычислите $\angle AYB$.

б) Пусть $\angle AYB=100°$. Вычислите $\angle AXB$.

в) Докажите, что сумма углов AXB и AYB одна и та же при любом положении точек X и Y.

31.19. Точка C лежит на окружности с диаметром AB, точка C_1 — проекция точки C на AB. Рассмотрим величины: R — радиус окружности, CC_1, AC, BC, AC_1, BC_1. Выберите любые две из них как известные и постарайтесь найти остальные.

31.20. Постройте: а) касательную окружности из точки, взятой вне ее круга; б) общую касательную к двум окружностям (внимание: может быть разное число касательных в зависимости от взаимного расположения окружностей).

31.21. Дана окружность с радиусом 2 и точка A на ней.

а) Вычислите длину хорды этой окружности, если она видна из A под углом: $30°$, $90°$, $120°$.

б) Под каким углом видна из точки A хорда длиной 1? длиной 2? длиной 3?

31.22. Под каким углом видна из точки на окружности радиусом R хорда, равная: а) R; б) $R\sqrt{2}$; в) $R\sqrt{3}$; г) $2R$; д) $\frac{3}{2}R$?

31.23. а) Верно ли утверждение: если из точки на окружности две ее хорды видны под равными углами, то эти хорды равны?
б) Верно ли обратное утверждение?
в) Верно ли, что большая хорда окружности из данной точки на этой окружности видна под большим углом?

31.24. Пластинка имеет форму сегмента круга. Как, используя измерительные инструменты, найти радиус этого круга?

31.25. С корабля видны три маяка. Измерением на корабле получены углы между направлениями на эти маяки. Как получить на карте местонахождение корабля?

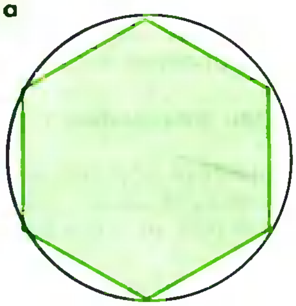
§ 32 Вписанные и описанные окружности

32.1 **Окружность, описанная около многоугольника.** Говорят, что **многоугольник вписан в окружность**, если все его вершины лежат на ней (*рис. 295, а*). Тогда об этой окружности говорят, что она описана около многоугольника. Итак, **окружность описана около многоугольника**, если она проходит через все его вершины.

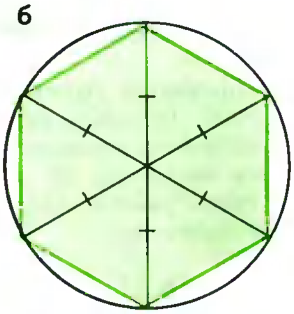
Ясно, что около многоугольника можно описать окружность, если найдется точка, равноудаленная от всех его вершин (*рис. 295, б*). Эта точка лежит на серединном перпендикуляре каждой стороны многоугольника (*рис. 295, в*). Следовательно, **около многоугольника можно описать окружность тогда и только тогда, когда серединные перпендикуляры всех его сторон имеют общую точку.** Она и будет центром описанной окружности.

Около каждого треугольника можно описать окружность (это доказано в следующем пункте). Но не около каждого четырехугольника можно описать окружность. Например, для параллелограмма это можно сделать лишь тогда, когда параллелограмм является прямоугольником (объясните почему, *рис. 296*).

а



б



в

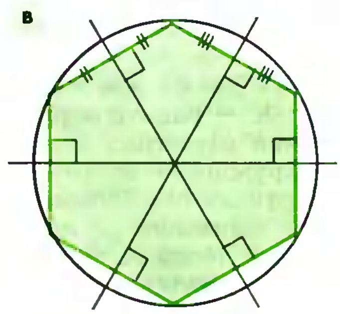


Рис. 295

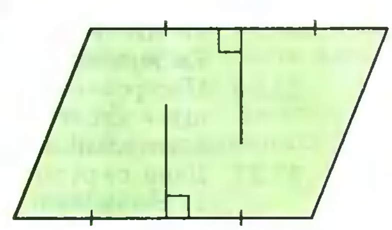


Рис. 296

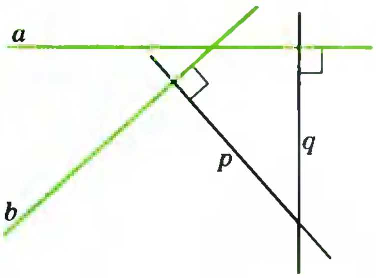


Рис. 297

32.2 Окружность, описанная около треугольника.

Окружность, описанная около треугольника. Чтобы утверждать, что серединные перпендикуляры любых двух сторон треугольника пересекаются, докажем следующую лемму:

Лемма. Прямые, перпендикулярные пересекающимся прямым, пересекаются.

• **Доказательство.** Пусть прямые a и b пересекаются, прямая $p \perp b$ и прямая $q \perp a$ (рис. 297). Допустим, что прямые p и q параллельны. Тогда поскольку $b \perp p$ и $p \parallel q$, то $b \perp q$. А так как и $a \perp q$, то $a \parallel b$. Это противоречит условию леммы. Итак, допущение, что $p \parallel q$, привело к противоречию. Поэтому p и q пересекаются.

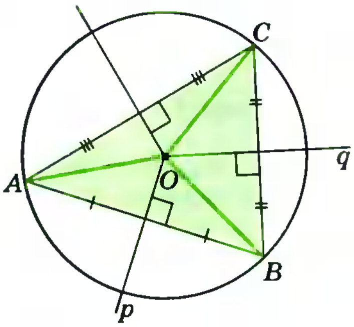


Рис. 298

Теорема 30. Около каждого треугольника можно описать окружность.

• **Доказательство.** Пусть дан треугольник ABC (рис. 298). Проведем серединные перпендикуляры p и q его сторон AB и BC. Они пересекутся в некоторой точке O (по лемме). Так как $O \in p$, то $OA = OB$. А так как $O \in q$, то $OB = OC$. Поэтому $OA = OC$, т. е. точка O равноудалена от всех вершин треугольника ABC. Значит, около треугольника ABC можно описать окружность с центром в точке O и радиусом $R = OA$.

Выделим важный частный случай:

центром окружности, описанной около прямоугольного треугольника, является середина его гипотенузы.

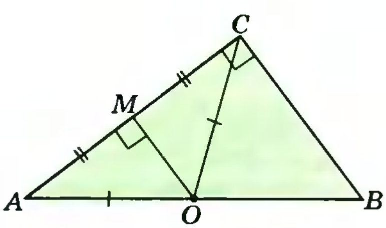


Рис. 299

• Действительно, пусть AB — гипотенуза прямоугольного треугольника ABC (рис. 299), точка O — середина AB, а точка M — середина катета AC. Так как средняя линия OM параллельна катету BC (см. п. 25.3), то прямая OM перпендикулярна катету AC. Поэтому OM — серединный перпендикуляр катета AC. Значит, $OA = OC$. А так как $OA = OB$, то точка O — центр окружности, описанной около треугольника ABC.

32.3 Окружность, вписанная в многоугольник.

Окружность, вписанная в многоугольник. Говорят, что **многоугольник описан около окружности,** если все его стороны касаются данной окружности (рис. 300). Тогда об этой окружности говорят, что она вписана в данный многоугольник. Итак, **окружность вписана в многоугольник**, если она касается всех его сторон.

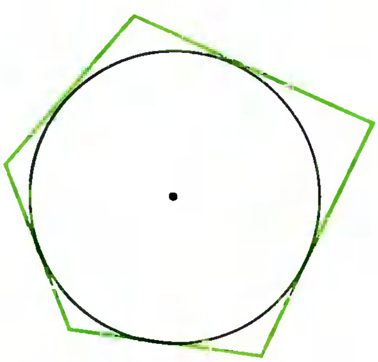
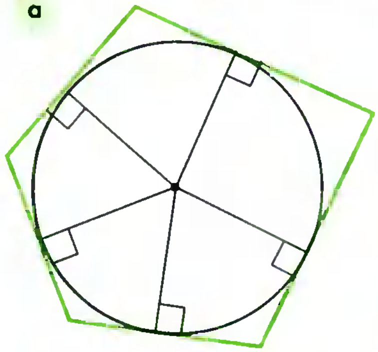


Рис. 300

Так как расстояние от центра окружности, вписанной в многоугольник, до его сторон равно радиусу окружности, то ее центр равноудален от всех сторон этого многоугольника (рис. 301, а).

В каждый треугольник можно вписать окружность (это доказано в следующем пункте). Но не в каждый четырех-

а



б

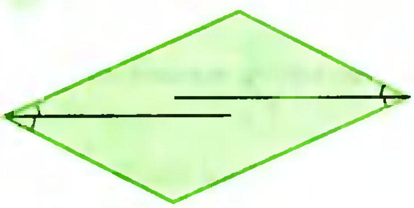


Рис. 301

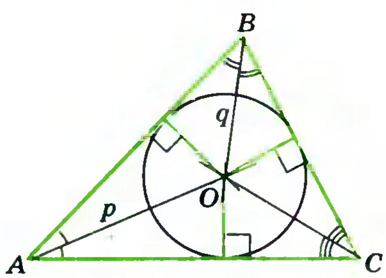


Рис. 302

угольник можно вписать окружность. Например, для параллелограмма это можно сделать лишь тогда, когда параллелограмм является ромбом (объясните почему, *рис. 301, б*).

32.4 Окружность, вписанная в треугольник.

Теорема 31. В каждый треугольник можно вписать окружность.

• **Доказательство.** Пусть дан треугольник ABC (*рис. 302*). Проведем биссектрисы p и q его углов A и B. Они пересекутся в некоторой точке O. Так как $O \in p$, то она равноудалена от сторон AB и AC, а так как $O \in q$, то она равноудалена от сторон BC и BA. Поэтому точка O равноудалена от всех сторон треугольника ABC.

Итак, в треугольник ABC можно вписать окружность с центром в точке O.

Площадь S треугольника ABC, его периметр $P = a + b + c$ и радиус r вписанной в него окружности связаны равенством

$$S = \frac{1}{2} Pr. \qquad (1)$$

• Действительно, высоты треугольников OBC, OCA и OAB, проведенные из вершины O, равны r. А сумма площадей этих треугольников равна S. Поэтому

$$S = \frac{1}{2} ar + \frac{1}{2} br + \frac{1}{2} cr = \frac{1}{2} (a + b + c) r = \frac{1}{2} Pr,$$

т. е. имеет место (1).

Равенство (1) справедливо и для любого многоугольника, в который можно вписать окружность. Докажите его самостоятельно, разбивая многоугольник на треугольники с общей вершиной в центре вписанной окружности и основаниями на сторонах многоугольника.

1. Окружность описана около многоугольника. Как это можно сказать иначе? При каком условии это возможно? Как построить такую окружность?
2. Окружность вписана в многоугольник. Как это можно сказать иначе? Как построить такую окружность?
3. О многоугольнике высказаны два утверждения: а) около этого многоугольника можно описать окружность; б) в этот многоугольник можно вписать окружность. Приведите примеры такого многоугольника, для которого верны оба утверждения; только одно из них; ни одно из них неверно.
4. Какие вы знаете формулы для вычисления радиусов окружностей, описанной около треугольника и вписанной в него?

Задачи к § 32

32.1. В равнобедренном треугольнике ABC основание $BC=4$ см. Постройте окружность, описанную около этого треугольника, если угол A равен: а) 30°; б) 90°; в) 150°. В каждом случае установите положение центра относительно треугольника. Какое предположение вы можете сделать? Проверьте его для других значений BC и угла A. Как доказать ваше предположение?

32.2. В окружность с радиусом R вписан равнобедренный треугольник ABC с основанием $BC=a$, боковой стороной b, высотой $AD=h$.
а) Вычислите его стороны, если $R=1$, а $\angle A=30°$, 120°.
б) Вычислите его стороны, если $R=2$, а высота $h=1$.
в) Пусть d — продолжение AD до окружности. Докажите, что $b^2=2Rh$ и $a^2=4dh$. Из первой формулы выразите R. Как изменяется R в зависимости от h, если b — величина постоянная?

32.3. Пусть известны стороны треугольника. Как вычислить радиус окружности, описанной около этого треугольника?

32.2 **32.4.** а) Вычислите сторону равностороннего треугольника, вписанного в окружность с радиусом 1.
б) Вычислите радиус окружности, описанной около равностороннего треугольника со стороной 1.
в) Установите зависимость между стороной равностороннего треугольника, равной a, и радиусом R описанной окружности.

32.5. Дан равнобедренный треугольник. Вычислите радиус описанной около него окружности, если:
а) его основание равно 2, а боковая сторона 3;
б) основание равно 1, а угол при вершине 30°, 150°;
в) высота, опущенная на основание, равна 1, а угол при основании 30°;
г) площадь равна S, а угол при основании φ.

32.6. В окружность с радиусом 1 вписан равнобедренный треугольник. Чему равна его площадь, если: а) его боковая сторона равна 1; б) его высота равна 1; в) его основание равно 1; г) его высота равна x; д) его основание равно $2d$?

32.7. Вычислите радиус окружности, описанной около треугольника ABC, если:
а) его стороны равны: 6, 8, 10; 6, 8, 9; 6, 8, 12;
б) $c=2$, $\angle A=20°$, $\angle B=40°$;
в) $a=3$, $b=4$, $\angle C=60°$.

32.8. Можно ли восстановить равнобедренный треугольник, если от него остались на рисунке центр описанной окружности и: а) боковая сторона; б) основание?

32.4 **32.9.** Объясните, почему в равностороннем треугольнике совпадают центры вписанной и описанной окружностей. Установите зависимость между их радиусами.

32.10. а) Чему равен радиус окружности, вписанной в равносторонний треугольник со стороной 1?
б) Чему равна сторона равностороннего треугольника, описанного около окружности радиусом 1?

32.11. Как вычислить радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник, у которого известны:
а) катеты; б) гипотенуза и острый угол;
в) площадь и острый угол; г) периметр и острый угол?

32.12. Вычислите радиус окружности, вписанной в равнобедренный треугольник с основанием a, боковой стороной b, углом при вершине α, углом при основании β, высотой h, опущенной на основание, и площадью S, если:

а) $a=1$, $b=2$; б) $a=1$, $\alpha=30°$; в) $h=4$, $\beta=30°$;
г) $S=6$, $\alpha=120°$; д) $\beta=30°$, $b=2$.

32.13. В треугольник вписана окружность. Как вычислить ее радиус, если известны: а) две стороны и угол между ними; б) сторона и два угла?

§ 33 Правильные многоугольники

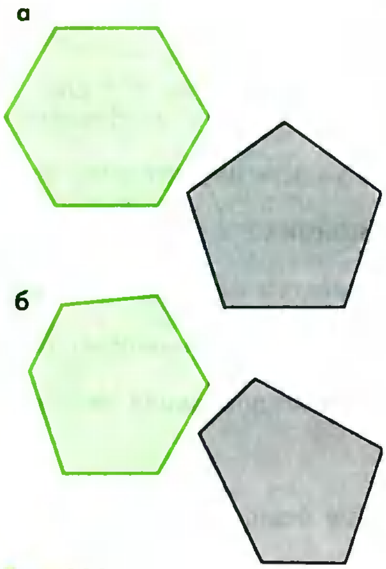


Рис. 303

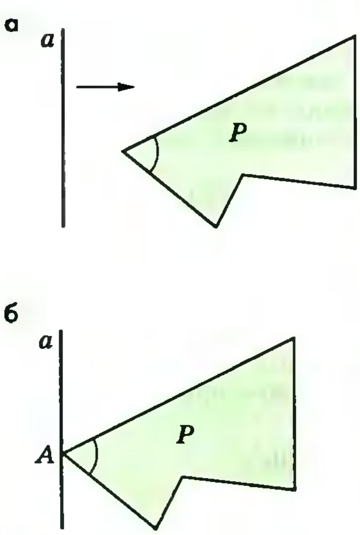


Рис. 304

33.1 Определение правильного многоугольника. На *рисунке 303, а* изображены многоугольники, имеющие наиболее «правильную» форму в сравнении с другими многоугольниками с тем же числом сторон *(рис. 303, б)*.

Определение. Многоугольник называется **правильным**, если у него все стороны равны и все углы равны.

Правильные треугольники и четырехугольники вам хорошо известны — это равносторонние треугольники и квадраты. Теперь мы познакомимся с общими свойствами любых правильных многоугольников.

Прежде всего заметим, что все углы правильного многоугольника меньше 180°. Для этого докажем, что у каждого многоугольника есть хотя бы один угол, меньший 180°.

• Пусть дан многоугольник P. Проведем какую-нибудь прямую, не пересекающую его *(рис. 304, а)*. Будем перемещать ее параллельно самой себе в сторону P. В некоторый момент мы получим прямую a, имеющую с P хотя бы одну общую точку, от которой P лежит по одну сторону *(рис. 304, б)*. На прямой a лежит хотя бы одна вершина A многоугольника P. Угол с вершиной A в многоугольнике P и будет меньше развернутого.

33.2 Центр правильного многоугольника. В правильном треугольнике есть такая точка, которая равноудалена от всех его вершин и от всех его сторон. (Какая?) Такая же точка есть и в квадрате. (Где именно?) Оказывается, такая же точка есть в любом правильном многоугольнике. Она называется центром правильного многоугольника. Итак, **центр правильного многоугольника — это точка, равноудаленная от всех его вершин и от всех его сторон.** Докажем существование центра.

Теорема 32 *(о центре правильного многоугольника).* **В каждом правильном многоугольнике есть точка, равноудаленная от всех его вершин и от всех его сторон.**

• **Доказательство.** Это доказательство не зависит от числа сторон правильного многоугольника, поэтому проведем его для правильного пятиугольника. Пусть $ABCDE$ — правильный пятиугольник. Проведем биссектрисы p и q углов A и B *(рис. 305)*. Лучи p и q пересекутся в некоторой точке O. Докажем, что O является центром правильного пятиугольника.

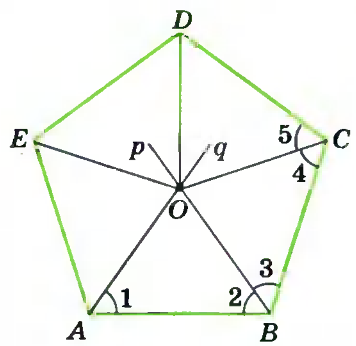


Рис. 305

Сначала докажем, что точка O равноудалена от всех вершин, т. е. $OA=OB=OC=OD=OE$. Так как $\angle 1=\angle 2$ (как половины равных углов), то треугольник OAB равнобедренный. Поэтому $OA=OB$. $\triangle OAB=\triangle OBC$, так как $BA=BC$, сторона OB у них общая и $\angle 2=\angle 3$ (поскольку BO — биссектриса угла B). Поэтому $OB=OC$. Отсюда получаем, что $\angle 4=\angle 3$.

$\angle 3=\frac{1}{2}\angle B$, $\angle B=\angle C$, и поэтому $\angle 3=\frac{1}{2}\angle C$. Но $\angle 3=\angle 4$. Значит, $\angle 4=\frac{1}{2}\angle C$, т. е. $\angle 4=\angle 5$. Последнее равенство означает, что CO — биссектриса угла C.

Повторяя проведенные рассуждения, мы получаем нужные равенства: $OC=OD$, $OE=OD$.

Докажем теперь, что точка O равноудалена от всех сторон правильного пятиугольника. Как ясно из предыдущего, треугольники OAB, OBC, OCD, ODE, OEA — равнобедренные треугольники, равные между собой. Значит, равны их высоты, проведенные к основаниям, т. е. к сторонам правильного пятиугольника. Иначе говоря, точка O равноудалена от всех сторон $ABCDE$.

Из этой теоремы следует, что: 1) около правильного многоугольника можно описать окружность; 2) в правильный многоугольник можно вписать окружность.

33.3 Следствия из теоремы о центре правильного многоугольника.

Следствие 1. Сторона a правильного n-угольника связана с радиусом R описанной около него окружности формулой

$$a=2R\cdot\sin\frac{180^\circ}{n}.$$

• **Доказательство.** Пусть AB — сторона правильного n-угольника P, а точка O — его центр (рис. 306). Тогда $OA=R$, а высота OK треугольника OAB, проведенная из вершины O, является его медианой и биссектрисой.

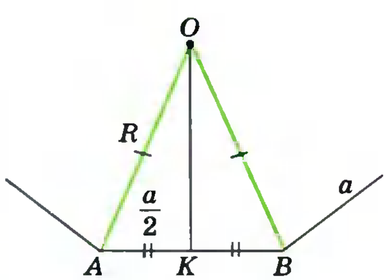


Рис. 306

Так как $\angle AOB=\frac{360^\circ}{n}$, то $\angle AOK=\frac{1}{2}\angle AOB=\frac{180^\circ}{n}$.

Из прямоугольного треугольника AOK с катетами $\frac{a}{2}$, OK и гипотенузой R получаем $\frac{a}{2}=R\cdot\sin\frac{180^\circ}{n}$, откуда и вытекает нужное нам равенство.

Следствие 2. Периметры правильных n-угольников относятся как радиусы описанных около них окружностей.

Доказательство несложно найти самим. Обозначьте стороны n-угольников a_1 и a_2, затем выразите их периметры. Составьте отношение периметров и воспользуйтесь формулой, полученной в следствии 1.

Гаусс

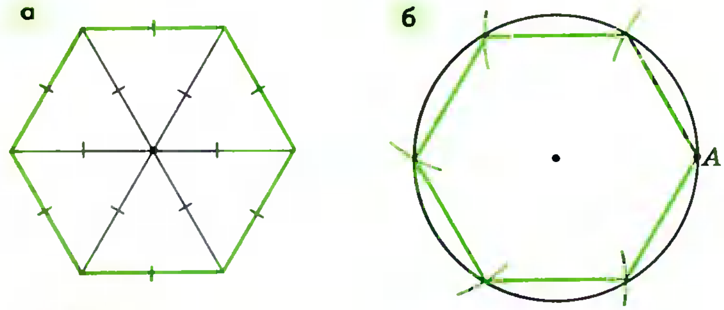


Рис. 307

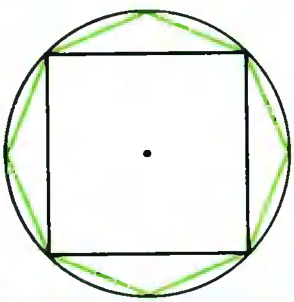


Рис. 308

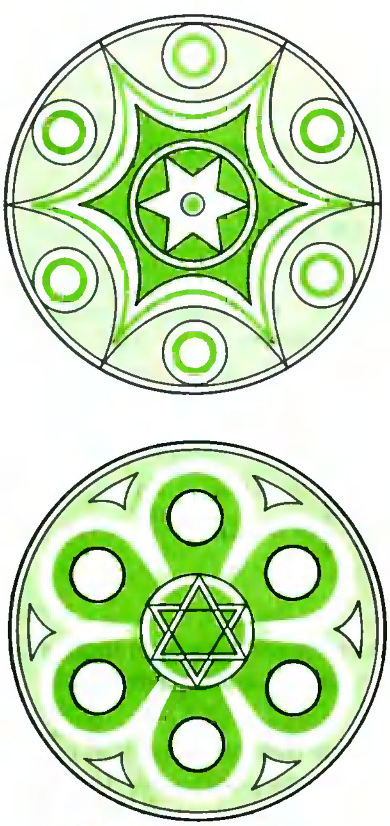


Рис. 309

33.4 **Построение правильных многоугольников.** Задача о построении циркулем и линейкой правильного n-угольника имеет интересную историю. Легко построить правильные треугольник и четырехугольник. Ознакомившись со свойствами правильных многоугольников, вы построите правильный шестиугольник: радиусами описанной окружности он разбивается на шесть правильных треугольников (рис. 307, а). Поэтому его сторона равна радиусу описанной окружности (рис. 307, б). Если от некоторой точки A окружности последовательно откладывать ее хорды, равные радиусу, то и получатся его вершины. Если уже построен некоторый правильный n-угольник P_n, то циркулем и линейкой легко строится правильный $2n$-угольник P_{2n}. Для этого можно описать около P_n окружность и разделить пополам каждую дугу этой окружности, стягиваемую стороной многоугольника P_n (рис. 308). Точки деления этих дуг вместе с вершинами многоугольника P_n и будут вершинами правильного $2n$-угольника P_{2n}. Повторяя это построение, можно затем построить правильный $4n$-угольник, правильный $8n$-угольник и т. д. Указанное построение называется *удвоением сторон правильного многоугольника*.

Какие правильные n-угольники можно построить циркулем и линейкой? Например, можно ли построить правильный пятиугольник и правильный семиугольник? Оказывается, что правильный пятиугольник циркулем и линейкой построить можно, а правильный семиугольник — нельзя. Задача о построении циркулем и линейкой правильных многоугольников изучалась еще древнегреческими геометрами, а окончательно решена была лишь в 1801 г. великим немецким математиком **Карлом Гауссом** (1777—1855). К. Гаусс, используя средства алгебры, доказал, что циркулем и линейкой могут быть построены лишь те правильные n-угольники, когда число n имеет следующее разложение на множители: $n=2^m \cdot p_1 \cdot \ldots \cdot p_q$, где m — неотрицательное целое число, а $p_1, \ldots, p_q$ — различные простые числа вида $2^{2^k}+1$ (k — натуральное). Число 5 имеет такой вид, а число 7 не имеет. Но приближенное разбиение окружности циркулем на любое число равных частей (а значит, и построением циркулем и линейкой любого правильного n-угольника) с любой сколь угодно высокой точностью всегда осуществимо. Это и делается с давних времен на практике, например, когда изготовляют циферблаты, рисуют орнаменты *(рис. 309)*.

33.5 **Правильные многогранники.** Правильность некоторой геометрической фигуры состоит в равенстве ее элементов. Так, у правильных многоугольников равны их стороны и углы. Элементами многогранников являются их ребра, плоские углы граней и двугранные углы при ребрах.

Поэтому **правильным многогранником** естественно назвать такой многогранник, у которого равны друг другу все ребра, все плоские углы граней и все двугранные углы. У такого многогранника все грани должны быть одинаковыми правильными многоугольниками. Оказывается, что таких многогранников всего пять видов (в отличие от правильных многоугольников, которых бесконечно много, так как для каждого натурального $n \geqslant 3$ существует правильный n-угольник).

То, что правильных многогранников всего пять видов, было известно еще в Древней Греции, и «Начала» Евклида завершаются следующим предложением: «Вот я утверждаю, что, кроме упомянутых пяти тел, нельзя построить другого тела, заключенного между равносторонними равноугольными равными друг другу многоугольниками». Последняя, XIII книга «Начал» посвящена построению пяти правильных многогранников: **тетраэдра** *(рис. 310, а)*, **куба** *(рис. 310, б)*, **октаэдра** *(рис. 310, в)*, **додекаэдра** *(рис. 310, г)*, **икосаэдра** *(рис. 310, д)*. Древние греки называли их платоновыми телами в честь философа **Платона**, придававшего изучению геометрии особое значение.

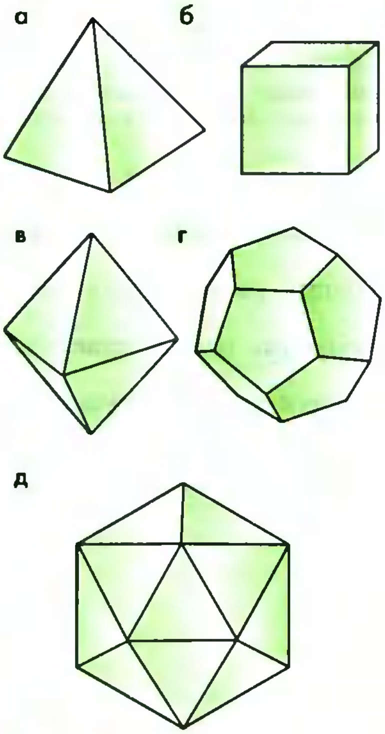


Рис 310

1. Какой многоугольник называется правильным?
2. Какие свойства правильных многоугольников вы знаете?
3. Как вычислить сторону правильного n-угольника, вписанного в окружность с радиусом R?
4. Что вы знаете о построении правильных n-угольников циркулем и линейкой?

Задачи к §

33.1. Если в правильном многоугольнике соединить отрезками последовательно середины сторон, то получится новый правильный многоугольник. Докажите это. Придумайте другие способы получения правильных многоугольников, исходя из имеющегося правильного многоугольника.

33.2. Пусть известна сторона правильного n-угольника. Как вычислить: а) угол при его вершине; б) его площадь?

33.3. Объясните, почему в правильном многоугольнике: а) равны наименьшие диагонали; б) из любой его вершины каждая сторона (кроме тех, которым эта вершина принадлежит) видна под одним и тем же углом; в) все треугольники, вершины которых находятся в вершинах данного многоугольника, имеют один и тот же радиус описанной окружности.

33.4. Нарисуйте окружность. Постройте вписанный в нее: а) правильный треугольник; б) квадрат.

33.5. Постройте правильный шестиугольник. Докажите, что: а) для каждой его диагонали есть равная диагональ; б) среди диагоналей есть перпендикулярные; в) среди диагоналей есть параллельные.

33.6. Вычислите в правильном шестиугольнике: а) угол между диагоналями, выходящими из одной вершины; б) угол между пересекающимися наименьшими диагоналями; в) отношение большей диагонали к меньшей; г) отношение частей большей диагонали, на которые ее делит меньшая диагональ; д) отношение частей, на которые делят друг друга две меньшие диагонали; е) отношение площадей шестиугольника и треугольника, образованного его меньшими диагоналями (диагонали являются сторонами).

33.7. Радиус окружности, описанной около правильного n-угольника, равен 1. Вычислите длину его стороны для $n=3$, 4, 6.

33.8. Длина стороны правильного n-угольника равна 1. Вычислите радиус описанной около него окружности для $n=3$, 4, 6.

33.9. Радиус окружности, вписанной в правильный n-угольник, равен 1. Вычислите длину его стороны для $n=3$, 4, 6.

33.10. Длина стороны правильного n-угольника равна 1. Вычислите радиус вписанной в него окружности для $n=3$, 4, 6.

33.11. Найдите площадь правильного n-угольника, если известен радиус окружности: а) описанной около него; б) вписанной в него.

33.12. Сторона правильного n-угольника равна a. Чему равна сторона правильного $2n$-угольника, если оба вписаны в одну окружность (описаны около окружности)?

§ 34 Длина окружности и площадь круга

34.1 **Длина кривой линии.** Длину сравнительно короткого пути можно измерять шагами, например длину извивающейся дороги или тропинки *(рис. 311)*. Длину железнодорожного пути можно измерять, считая промежутки между километровыми столбами. Длину кривой линии на чертеже или на карте измеряют циркулем с постоянным раствором *(рис. 312, а)*. Во всех этих случаях длину линии измеряют последовательными отрезками, концы которых лежат на данной линии. Эти отрезки образуют ломаную, длина которой равна сумме длин отрезков, и она дает более или менее точное значение длины линии.

Ломаная, вершины которой лежат последовательно на данной линии от одного ее конца до другого, называется **ломаной, вписанной в данную линию** *(рис. 312, б)*. Линия может быть и замкнутой (например, окружность или дистанция кросса, старт и финиш которого находятся в одном месте). Измеряя длину замкнутой линии, вписывают в нее замкнутую ломаную *(рис. 312, в)*. Например, вершины такой ломаной для дистанции кросса — это флажки вдоль дистанции, которыми она размечена.

Рис. 311

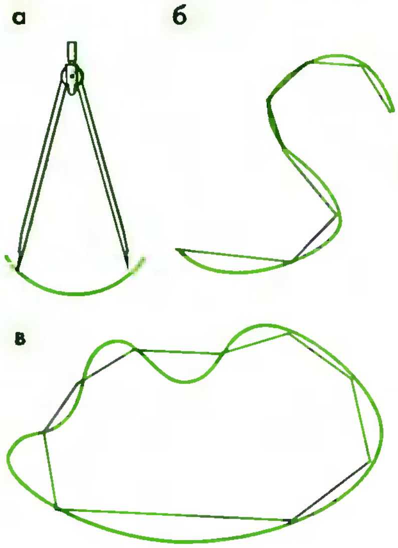


Рис. 312

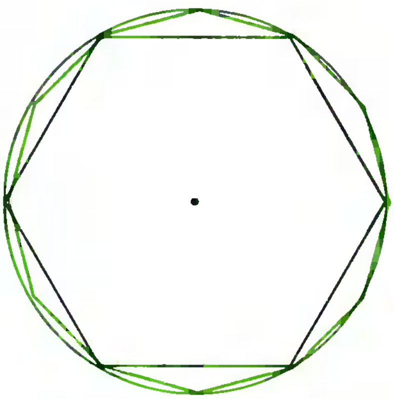


Рис 313

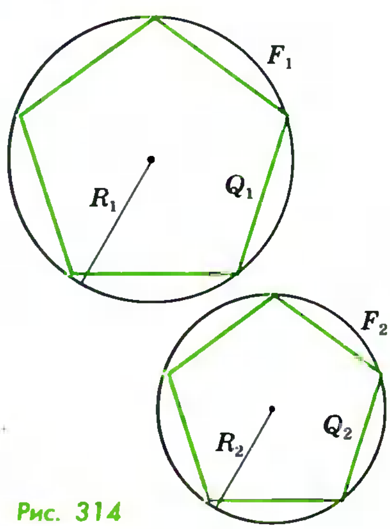


Рис. 314

Длина кривой линии приближенно равна длине вписанной ломаной, и вычисляется она тем точнее, чем меньше звенья ломаной и чем чаще располагаются вершины ломаной на данной кривой.

34.2 **Длина окружности.** Вычисляя длины кривых линий, можно брать любые вписанные в них ломаные, лишь бы вершины этих ломаных располагались на кривой линии достаточно часто. Для окружности таким свойством обладают границы правильных многоугольников, вписанных в эту окружность, когда число их сторон неограниченно увеличивается (*рис. 313*). Поэтому, измеряя длину окружности, рассматривают вписанные в нее правильные n-угольники и вычисляют их периметры. Чем больше n, тем периметр многоугольника меньше отличается от длины окружности.

В результате измерений, проводившихся с древнейших времен, было установлено, что длина окружности пропорциональна ее радиусу (или, что все равно, ее диаметру). Это выражает давно известная вам формула длины L окружности с радиусом R:

$$L = 2\pi R, \text{ или } L = \pi \cdot (2R),$$

т.е. π — коэффициент пропорциональности между L и $2R$.

И тогда вопрос о вычислении длины окружности сводится к вычислению числа π. Мы сначала установим пропорциональность длины окружности ее радиусу (диаметру), а затем расскажем о числе π.

Теорема 33 *(о длине окружности).* **Длина окружности пропорциональна ее радиусу.**

• **Доказательство.** Пусть F_1 и F_2 — две окружности с радиусами R_1 и R_2, а Q_1 и Q_2 — вписанные в них правильные n-угольники (*рис. 314*). Обозначим P_1 и P_2 периметры этих многоугольников. Периметры правильных n-угольников относятся как радиусы описанных окружностей (следствие 2 п. 33.3). Поэтому $\frac{P_1}{P_2} = \frac{R_1}{R_2}$.

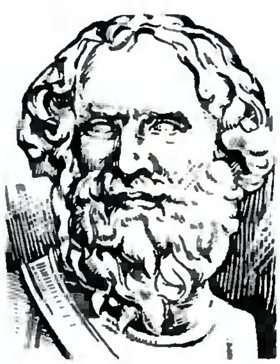
Если неограниченно увеличивать число сторон многоугольников Q_1 и Q_2 (например, удваивать его), то их периметры будут сколь угодно мало отличаться от длин L_1 и L_2 окружностей F_1 и F_2. («Сколь угодно мало» — это значит разность между периметрами и длиной окружности можно сделать меньше, чем, например, 10^{-3}, 10^{-6} и вообще любого положительного числа.)

Тогда число $\frac{L_1}{L_2}$ будет сколь угодно мало отличаться от величины $\frac{P_1}{P_2}$. С другой стороны, как уже сказано, $\frac{P_1}{P_2} = \frac{R_1}{R_2}$. Значит, число $\frac{L_1}{L_2}$ будет сколь угодно мало отличаться от числа $\frac{R_1}{R_2}$. Но такое возможно лишь тогда, когда эти числа равны. Итак, $\frac{L_1}{L_2} = \frac{R_1}{R_2}$, откуда получаем $\frac{L_1}{R_1} = \frac{L_2}{R_2}$.

Из результата теоремы следует, что отношение $\frac{L}{2R}$, т. е. длины окружности к ее диаметру, есть величина постоянная. Оно и обозначается буквой π.

34.3 **О числе π.** Число π иррациональное, т. е. оно может быть представлено десятичной дробью лишь приближенно. Вам известно такое приближение: $\pi \approx 3,14$. Более точное приближение: $\pi \approx 3,1416$. Вычислять π с любой точностью можно, находя периметры правильных многоугольников со все большим числом сторон. Тогда отношение $\frac{P}{2R}$ будет приближаться к π. Немного посчитаем. У правильного шестиугольника периметр равен $6R$. Поэтому $\frac{P}{2R} = 3$. Это дает первое приближение для π. Далее можно взять 12-угольник. Вычисляя его сторону a_{12}, получим *(рис. 313)*:

$$a_{12} = \sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 + \left(R - R\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = R\sqrt{2-\sqrt{3}} \approx R \cdot 0,51.$$



Архимед

Отсюда $\pi \approx 3,11...$. Дальше можно взять 24-угольник и получить еще более точное значение π. Знание достаточно точных приближений числа π имеет большое практическое значение, так как число π постоянно встречается в конкретных задачах. Поэтому такие приближения старались найти уже в глубокой древности. Так, в папирусе древнеегипетского жреца Ахмеса (ок. 1700 г. до н. э.) содержится довольно хорошее приближение для π: $\pi \approx \left(\frac{16}{9}\right)^2 \approx 3,1605$. Великий древнегреческий ученый **Архимед** (ок. 287—212 гг. до н. э.) в своем сочинении «Об измерении круга» дал такие приближения:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}, \ \pi \approx 3,14,$$

выразив через диаметр окружности периметр правильного 96-угольника.

Индийский математик и астроном **Ариабхата** (ок. 475 г.) нашел еще более точное приближение: $\pi \approx \approx 3,1416$. А работавший в XV в. в Самарканде в знаменитой обсерватории Улугбека математик **аль-Каши**, рассмотрев правильный многоугольник с 800 335 168 сторонами, дал приближенное значение для π с 16 верными знаками. Эйлер, применяя методы высшей математики, нашел для π приближение с 153 верными знаками. Современные ЭВМ могут находить приближения π с десятками тысяч верных знаков, но, конечно, для практики такие приближения не нужны.

Обозначение буквой π отношения длины окружности к ее диаметру ввел в общее употребление в XVIII в. великий математик **Леонард Эйлер** (1707—1783). С этой буквы начинается греческое слово, означающее «окружность».

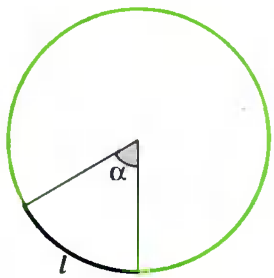


Рис. 315

34.4 **Длина дуги окружности.** Два радиуса, проведенные в круге, делят его на два сектора. Окружность этого круга делится при этом на две дуги. Эти дуги соответствуют двум центральным углам (рис. 315). Углу в $1°$ соответствует дуга, длина которой равна $\frac{1}{360}$ части длины окружности, т. е. ее длина равна $\frac{2\pi R}{360}=\frac{\pi R}{180}$. Поэтому длина l дуги, соответствующей центральному углу в $\alpha°$, имеет длину

$$l=\pi R\cdot\frac{\alpha}{180}.$$

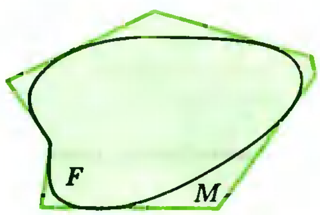


Рис. 316

34.5 **Площадь фигуры.** До сих пор мы вычисляли площади только многоугольных фигур. В общем случае для произвольной фигуры F ее площадь $S(F)$ можно вычислить с помощью площадей многоугольных фигур. Укажем один из способов.

Если многоугольная фигура M содержит фигуру F, то ее площадь $S(M)\geqslant S(F)$ (рис. 316). Значит, $S(M)$ будет приближенным значением для $S(F)$ с избытком. Для фигур, которые встречаются на практике, и для фигур, которые мы будем изучать, путем подходящего выбора многоугольной фигуры M удается этот избыток, т. е. разность $S(M)-S(F)$, сделать сколь угодно малым. Тем самым $S(F)$ можно вычислить с любой нужной точностью.

34.6 **Площадь круга.** Если данная фигура F — круг, то, измеряя его площадь $S(F)$, в качестве содержащих его многоугольных фигур проще всего взять описанные около него правильные многоугольники (рис. 317).

Теорема 34 *(о площади круга).* **Площадь S круга радиусом R выражается формулой $S=\pi R^2$.**

• **Доказательство.** Пусть F — круг с радиусом R, а Q — описанный около него правильный n-угольник (см. рис. 317). Обозначим периметр Q через P_n, а площадь Q через S_n. Тогда согласно формуле (1) п. 32.4 $S_n=\frac{1}{2}P_nR$, откуда $\frac{S_n}{P_n}=\frac{1}{2}R$.

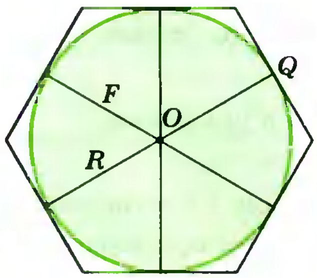


Рис. 317

Когда число n неограниченно возрастает (например, удваивается), величина P_n сколь угодно мало отличается от длины L окружности данного круга F, а площадь S_n сколь угодно мало отличается от $S(F)$. Тогда число $\frac{S}{L}$ сколь угодно мало отличается от величины $\frac{S_n}{P_n}$. С другой стороны, мы уже получили, что $\frac{S_n}{P_n}=\frac{1}{2}R$. Значит, два числа $\frac{S}{L}$ и $\frac{1}{2}R$ отличаются сколь угодно мало. Это возможно лишь в том случае, когда эти числа равны, т. е. $\frac{S}{L}=\frac{1}{2}R$. Отсюда и получаем, что

$$S=L\cdot\frac{1}{2}R=2\pi R\cdot\frac{1}{2}R=\pi R^2.$$

34.7 **Квадратура круга.** Квадратурой круга названа задача о построении циркулем и линейкой квадрата, равновеликого данному кругу, т. е. имеющего ту же площадь. Решить эту задачу пытались еще в Древней Греции. Невозможность ее решения была доказана лишь в конце XIX в. Выражение «квадратура круга» означает неразрешимую задачу.

34.8 **Площадь сектора.** Поскольку площадь сектора с центральным углом 1° составляет $\frac{1}{360}$ часть площади круга, а потому равна $\frac{\pi R^2}{360}$, то площадь сектора с центральным углом α° вычисляется по формуле

$$S_{\text{сект}} = \pi R^2 \cdot \frac{\alpha}{360}.$$

1. На чем основано приближенное вычисление длин кривых линий?
2. В чем идея доказательства теоремы о длине окружности?
3. По какой формуле вычисляется длина окружности?
4. По какой формуле вычисляется длина дуги окружности?
5. Что вы знаете о числе π?
6. По какой формуле вычисляется площадь круга?
7. По какой формуле вычисляется площадь сектора?
8. Как вычислить площадь сегмента?
9. Что вы знаете о квадратуре круга?

Задачи к § 34

34.1. Запишите формулу длины окружности.
34.2 а) Выразите из нее радиус окружности.
б) Пусть радиус окружности увеличился в 2 раза. Во сколько раз увеличилась ее длина? Сформулируйте общий вывод и докажите его. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.
в) Пусть радиус окружности R увеличился на величину r. Как изменилась длина окружности?
г) Пусть длина окружности L увеличилась на величину l. Как изменился радиус окружности? Обратите внимание, что его изменение не зависит от L.

34.2. а) В правильный треугольник вписана окружность и около него описана окружность. Вычислите отношение их длин.
б) Решите такую же задачу для квадрата.
в) Обобщите предыдущие задания на случай правильного n-угольника.

34.3. Чему равна длина окружности, описанной около:
а) прямоугольного треугольника с катетами a и b;
б) прямоугольного треугольника с катетом a и острым углом φ против него;
в) равнобедренного треугольника с боковой стороной a и углом при вершине φ;
г) прямоугольника с меньшей стороной a и острым углом φ между диагоналями?

34.4. Чему равна длина окружности, вписанной:
а) в равнобедренный прямоугольный треугольник с гипотенузой 1;
б) в прямоугольный треугольник с гипотенузой 1 и острым углом φ;
в) в равнобедренный треугольник с основанием a и углом при вершине φ;
г) в равнобедренный треугольник с высотой, проведенной к основанию, равной 1, и углом при вершине φ?

34.5. Окружности с общим центром называются концентрическими, а разность их радиусов называется шириной ограниченного ими кольца.
а) Как вычислить ширину кольца, если известны длины окружностей, его ограничивающих?
б) Имеется множество концентрических окружностей, каждые две соседние из которых имеют разность радиусов, равную d. Выберите любые две из них. Чему равна разность их длин?
в) Представьте себе, что Землю обтянули веревкой по экватору, а потом ее длину увеличили на 1 м и образовали из нее окружность, концентрическую с экватором. Пролезет ли в образовавшийся зазор кисть руки?

34.6. а) Колесо катится по прямой. Какая зависимость существует между его радиусом, числом оборотов, которое оно сделает, и длиной пройденного им пути?
б) Цирковой велосипедист едет на велосипеде, колеса которого имеют разные радиусы. Он объехал границу арены один раз. Как узнать, во сколько раз больше обернулось за это время меньшее колесо? Изменится ли полученный вами результат, если радиус арены будет в 2 раза больше?
в) Два зубчатых колеса сцеплены между собой. Их радиусы R_1 и R_2. Первое из них сделало n оборотов. Сколько оборотов сделало второе? Пусть теперь есть третье колесо, которое имеет радиус R_3 и сцеплено со вторым. Сколько оно сделало оборотов? Что интересного в полученном результате? А сколько оборотов сделает третье колесо, если, кроме того, что оно сцеплено со вторым, будет еще сцеплено с первым?

34.7. Запишите формулу для вычисления длины дуги окружности.
34.4 а) Из нее выведите, что длина дуги окружности пропорциональна величине соответствующего ей центрального угла (при постоянном радиусе) и пропорциональна радиусу окружности (при постоянном центральном угле).
б) Выразите из этой формулы радиус окружности. Каков характер его зависимости от остальных величин?
в) Выразите из этой же формулы величину центрального угла, соответствующего данной дуге. Каков характер зависимости ее от остальных величин?
г) Докажите, что длины двух дуг одной окружности относятся как величины этих дуг.

34.8. На окружности с радиусом 1 отмечена дуга. Чему равна ее длина, если эта дуга видна из центра под углом: а) 30°; б) 135°; в) 240°; г) 315°; д) 70°; е) 184°; ж) φ?

34.9. Под каким углом видна из центра окружности с радиусом 1 дуга этой окружности, длина которой равна: а) π; б) $\frac{\pi}{2}$; в) $\frac{\pi}{6}$; г) $\frac{2\pi}{3}$; д) $\frac{7\pi}{4}$; е) $\frac{11\pi}{6}$; ж) 1?

34.10. а) В окружности с радиусом R проведена хорда длиной R. Чему равны длины стягиваемых ею дуг?
б) Какой длины должна быть хорда в окружности с радиусом R, чтобы длина одной дуги была в 2 раза больше длины другой?

34.11. а) Из точки проводятся две касательные к окружности. Объясните, почему при удалении точки от окружности длина ближайшей к этой точке дуги окружности увеличивается.
б) Отрезки CA и CB касаются некоторой окружности в точках A и B. Как найти длину дуги AB, зная отрезок CA и угол ACB? Вычислите ее, если $CA = 1$ и $\angle ACB = 120°$.

34.12. Круглая площадка разбита дорожками на секторы. Вы находитесь на пересечении границы площадки и дорожки, а ваш товарищ — в другой такой же точке. Как вам побыстрее добраться до него? (Ходить можно только по дорожкам и вокруг площадки.)

34.13. Часы показывали 15.00. Как вычислить путь, который пройдет конец минутной стрелки, пока она догонит часовую?

34.14. Нарисуйте отрезок AB. Вы хотите покороче попасть из A в B, двигаясь только по полуокружностям, диаметры которых лежат на AB. При этом соседние диаметры не накладываются друг на друга. Какой вы выберете путь?

34.15. Запишите формулу площади круга.
а) Выразите из нее радиус круга. Пропорциональность каких величин указана в полученной формуле?
б) Как изменится площадь круга, если его радиус увеличится в 2 раза? Обобщите эту задачу.
в) Как изменился радиус круга, если его площадь уменьшилась в 2 раза?
г) Докажите, что площади двух кругов относятся как квадраты их радиусов.

34.16. Как вычислить площадь кольца?

34.17. а) В круге с радиусом R проведена окружность с тем же центром радиусом $\frac{1}{2}R$. Какую часть составляет площадь полученного кольца от площади круга?
б) Ответьте на тот же вопрос, если меньшая окружность имеет радиус $0{,}9R$.

34.18. Внутри данного круга проходит окружность, которая делит его площадь пополам. Каков радиус этой окружности?

34.19. Вычислите площадь круга, описанного около:
а) равностороннего треугольника со стороной 1;
б) равнобедренного прямоугольного треугольника с катетом 1;
в) прямоугольного треугольника с катетом a и прилежащим к нему острым углом φ;
г) равнобедренного треугольника с боковой стороной 1 и углом 120°.

34.20. Вычислите площади кругов, вписанных в треугольники, перечисленные в задаче 34.19.

34.21. а) Квадрат и круг имеют одинаковую длину границы. Какая из этих фигур имеет большую площадь?
б) Квадрат и круг равновелики. У какой из этих фигур длиннее граница?

34.22. Почему для передачи газа на большие расстояния выгоднее использовать трубы большого диаметра?

34.23. Запишите формулу для вычисления площади сектора.
а) Как изменится его площадь при изменении только радиуса? только угла?
б) Выразите из этой формулы радиус.
в) Как из этой формулы вычислить центральный угол?

34.24. Из круга с радиусом 1 вырезан сектор. Какова его площадь, если центральный угол этого сектора равен: а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 90°; д) 120°; е) 135°; ж) 150°; з) 180°; и) 300°?

34.25. Как вычислить площадь сектора, если известны: а) радиус круга и длина его дуги; б) длина его дуги и центральный угол; в) длина его границы и центральный угол?

34.26. В круге с радиусом R проведена хорда. Она видна из центра под углом φ. Как, зная R и φ, найти площадь образовавшихся сегментов?

34.27. В круге с радиусом 1 проведена хорда. Чему равна площадь меньшего сегмента, если хорда видна из центра под углом: а) 30°; б) 45°; в) 60°; г) 90°; д) 120°; е) 135°; ж) 150°?

34.28. Ясно, что хордой можно отсечь от круга $\frac{1}{3}$ его площади. Как вы обобщите это утверждение? Сможете ли вы найти центральный угол, соответствующий этой хорде?

34.29. Сектор состоит из треугольника и сегмента.
а) Докажите, что при центральном угле сектора в 120° площадь сегмента больше площади треугольника, а при центральном угле в 30° она меньше.
б) Могут ли треугольник и сегмент иметь равные площади?

34.30. Что вы будете измерять и как проведете вычисления, чтобы узнать площадь реального: а) сектора; б) сегмента?

§ 35 Сфера и шар. Цилиндр и конус

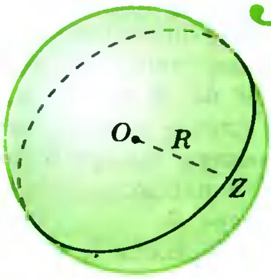


Рис. 318

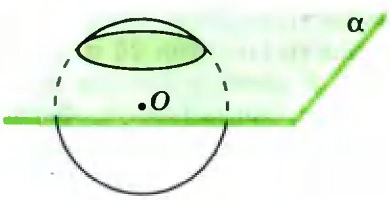


Рис. 319

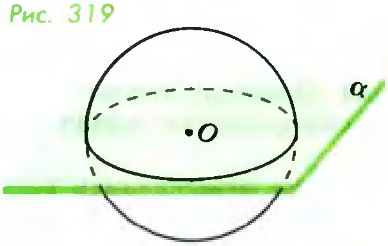


Рис. 320

Рис. 321

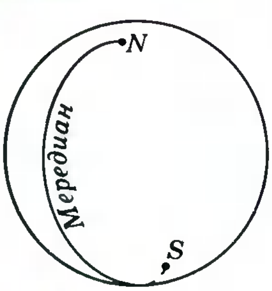


Рис. 322

35.1 **Сфера и шар.** Пространственными аналогами окружности и круга являются сфера и шар. В определениях окружности и круга достаточно заменить слово «плоскость» словом «пространство», чтобы получить определения сферы и шара. Вот определение сферы.

Сферой с центром O и радиусом R называется фигура, которая состоит из всех точек пространства, удаленных от точки O на расстояние R *(рис. 318)*.

Определение шара дайте самостоятельно.

Знакомясь со свойствами шара, отметим прежде всего, что если рассечь шар плоскостью, то в сечении получится круг *(рис. 319)*. При этом окружность полученного круга будет сечением сферы, ограничивающей шар. Рисуют окружность на сфере в виде эллипса — сплюснутой окружности.

Те окружности на сфере, радиусы которых равны радиусу сферы, называют **большими окружностями.** Все они получаются как сечения сферы плоскостями, проходящими через ее центр *(рис. 320)*.

Большие окружности на сфере во многом аналогичны прямым на плоскости: например, каждая большая окружность разбивает сферу на две полусферы. А дуги больших окружностей (меньшие полуокружностей) аналогичны отрезкам прямых. Такими дугами ограничены сферические треугольники и многоугольники *(рис. 321)*.

Знакомые вам из географии меридианы — это половины больших окружностей с концами в полюсах *(рис. 322)*. Кроме меридианов, на глобусе рисуют параллели — семейство окружностей с центрами на земной оси — отрезке, соединяющем два полюса. Самая большая параллель — экватор. Из параллелей выделяют также два тропика и два полярных круга (точнее говоря, полярные окружности) *(рис. 323)*.

Сферическая геометрия возникла очень давно, еще в Древнем Вавилоне и Древней Греции. И появилась она в результате астрономических наблюдений за движениями звезд и планет на небесной сфере — так древние представляли себе небесный свод.

35.2 **Взаимное расположение сферы и плоскости.** Классификация случаев взаимного расположения сферы S с радиуса R и центром O и плоскости α проводится вполне аналогично классификации случаев взаимного расположения на плоскости прямой и окружности (п. 31.2, *рис. 289*).

1) Если расстояние от центра O до плоскости α больше R, то все точки плоскости α удалены от точки O дальше чем на R, а потому сфера S и плоскость α общих точек не имеют *(рис. 324)*.

2) Если расстояние от центра O до плоскости α равно R, то сфера S и плоскость α имеют единственную общую точку — основание A перпендикуляра OA, опущенного из точки O на плоскость α, а все остальные точки плоскости α удалены от точки O дальше чем на R и точками сферы не являются *(рис. 325)*. В этом случае (когда сфера и плоскость имеют единственную общую точку) говорят, что **сфера и плоскость касаются**, а плоскость α называется **касательной плоскостью к сфере S**.

3) Если расстояние от центра O до плоскости α меньше R, то плоскость α проходит через точку, лежащую внутри сферы S, и пересекает ее по окружности *(рис. 326)*.

Теорема о касательной плоскости к сфере аналогична теореме о касательной к окружности (теорема 28 п. 32.2) и формулируется так: плоскость и сфера касаются в некоторой точке тогда и только тогда, когда радиус сферы, проведенный в эту точку, перпендикулярен данной плоскости.

Рис. 323

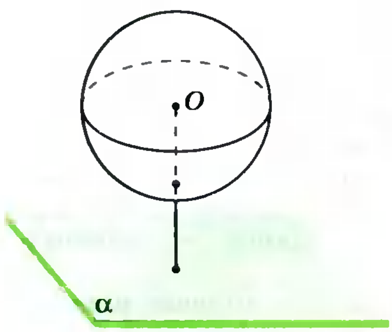


Рис. 324

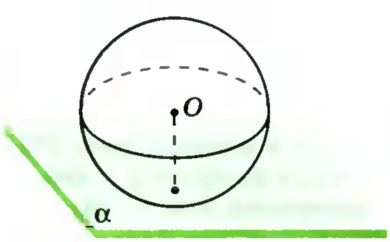


Рис. 325

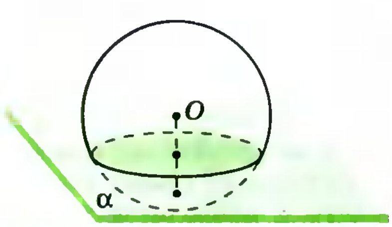


Рис. 326

35.3 **Цилиндры и конусы.** Цилиндры вам хорошо знакомы: форму цилиндра имеют, например, консервные банки, круглые стаканы или кастрюли. **Цилиндр** можно получить, вращая в пространстве прямоугольник вокруг его средней линии *(рис. 327)*.

Это значит, что цилиндр является объединением всех равных друг другу прямоугольников, имеющих общую сторону — среднюю линию. Эта их общая средняя линия называется **осью** цилиндра, а также **высотой** цилиндра, а каждый из прямоугольников является **осевым сечением** цилиндра. Стороны рассмотренных прямоугольников, параллельные оси цилиндра, называются **образующими** цилиндра. Образующие цилиндра заполнят **боковую поверхность** цилиндра. А другие стороны этих прямоугольников заполнят два равных круга — **основания** цилиндра. Интересно, что все сечения цилиндра плоскостями, параллельными оси цилиндра, являются прямоугольниками *(рис. 328)*.

Предметы, имеющие форму конуса, встречаются реже. Форму конуса имеют, например, воронки или (часто) кры-

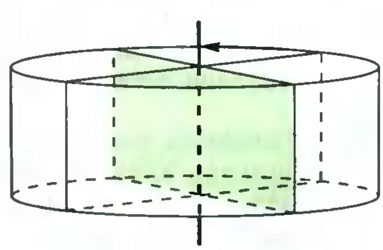


Рис. 327

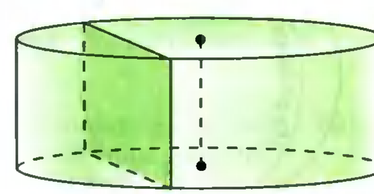


Рис. 328

Рис. 329

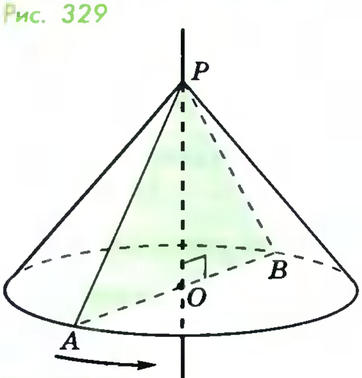


Рис. 330

ши круглых башен *(рис. 329)*. **Конус** можно получить, если вращать равнобедренный треугольник вокруг высоты, проведенной к основанию *(рис. 330)*. Это значит, что конус является объединением всех равных друг другу равнобедренных треугольников с общей вершиной, имеющих общую высоту, проведенную к основанию. Эта их общая высота называется **осью** конуса, а также **высотой** конуса, а каждый из равнобедренных треугольников является **осевым сечением** конуса.

Боковые стороны равнобедренных треугольников называются **образующими** конуса. Образующие конуса заполнят **боковую поверхность** конуса. Основания равнобедренных треугольников заполнят круг — **основание** конуса.

1. В чем отличие окружности от сферы? А что у них общего?
2. В чем отличие круга от шара? А что у них общего?
3. Какие части сферы и шара вы знаете?
4. Дайте самостоятельно определение диаметра сферы (шара), а также определение диаметрально противоположных точек на сфере.
5. Какие вы знаете определения цилиндра?
6. Какие части цилиндра вы знаете?
7. Какие вы знаете определения конуса?
8. Какие части конуса вы знаете?

Задачи к §35

35.1. Две сферы имеют единственную общую точку. Установите зависимость между радиусами сфер и расстоянием между их центрами.

35.1 35.2. Какую фигуру образуют середины всех радиусов сферы?

35.3. Сколько общих точек имеют две большие окружности на одной сфере? На сколько частей разбивают сферу две ее большие окружности? Такие части на сфере называют двуугольниками. Сделайте рисунки.

35.4. На сколько частей могут разбивать сферу три большие окружности? Сделайте рисунки.

35.5. Какой симметрией обладает сфера (шар)?

35.2 35.6. Сколько общих точек могут иметь две окружности на одной сфере? Сделайте рисунки.

35.7. На сколько частей могут делить сферу три окружности? Сделайте рисунки.

35.8. Проведите классификацию взаимного расположения прямой и сферы (шара).

35.9. Сколько окружностей можно провести через две точки данной сферы? Есть ли среди них окружность наибольшего радиуса? Что это за окружность? Есть ли среди них окружность наименьшего радиуса? Зависят ли ответы на эти вопросы от положения данных точек на сфере?

35.3 35.10. Нарисуйте цилиндр и его осевое сечение. Объясните, почему цилиндр можно получить, вращая прямоугольник вокруг одной из его сторон. Что это значит?

35.11. Нарисуйте конус и его осевое сечение. Объясните, почему конус можно получить, вращая прямоугольный треугольник вокруг одного из катетов. Что это значит?

35.12. Какой симметрией обладает цилиндр? Сделайте рисунки.

35.13. Какой симметрией обладает конус? Сделайте рисунки.

Задачи к VII главе

VII 1. Окружность с радиусом 2 касается сторон прямого угла. Уместится ли между сторонами угла и окружностью круг с радиусом 1? Каков радиус наибольшего круга, умещающегося в этой части плоскости?
Решите эту задачу для случая, когда радиус окружности равен R, а угол равен φ.

VII 2. Дан правильный пятиугольник.
а) Докажите, что все его диагонали равны.
б) Докажите, что каждая его диагональ параллельна какой-либо его стороне.
в) Вычислите, в каком отношении делится каждая его диагональ теми диагоналями, которые ее пересекают.
г) Какой по виду многоугольник ограничен всеми его диагоналями?
д) Какую часть составляет площадь этого многоугольника от площади данного многоугольника?

VII 3. а) Запишите зависимость между площадью круга и длиной его окружности. Какие величины, записанные в этой формуле, пропорциональны?
б) Как изменится площадь круга, если длина окружности увеличится в 2 раза? уменьшится в 3 раза?
в) Как изменится длина окружности, если площадь круга увеличится вдвое? уменьшится втрое?

VII 4. Дана окружность с радиусом 1.
а) В нее вписан правильный треугольник и около нее описан правильный треугольник. Чему равна разность площадей этих треугольников?
б) Какой правильный n-угольник надо вписать в эту окружность и какой правильный n-угольник надо описать около нее, чтобы разность их площадей была меньше 0,1; 0,001?
в) Для каких правильных описанных n-угольников площадь круга отличается от их площади меньше чем на 0,001?

VII 5. Как вычислить площадь сегмента, если известны:
а) длина его хорды и длина его дуги;
б) длина его хорды и длина части радиуса круга, перпендикулярного хорде сегмента и лежащая в сегменте;
в) его периметр и угол, под которым хорда видна из центра?

VII 6. Две хорды длиной d круга с радиусом R пересекаются и взаимно перпендикулярны. Как вычислить:
а) расстояние от центра круга до точки пересечения этих хорд;
б) расстояния между концами хорд;
в) площадь четырехугольника, вершины которого являются концами хорд;
г) длины дуг, на которые разбилась окружность концами хорд;
д) площади частей круга, на которые он разбит этими хордами?

VII 7. Из точки A провели к данной окружности две касательные AB и AC (B и C — точки касания). Известны угол BAC и расстояние от A до круга. Как вычислить:
а) радиус круга;
б) длины дуг между точками B и C;
в) площади частей круга, на которые он делится хордой BC?

VII 8. Восстановите равнобедренный треугольник по:
а) двум вершинам и центру описанной около него окружности;
б) двум вершинам и центру вписанной в него окружности.

VII 9. В каких границах находится отношение $R:r$ для равнобедренного треугольника, если R — радиус описанного около него круга, а r — радиус вписанного в него круга? Возможно ли, что $R:r=2$, $R:r=10$?

VII 10. Пусть в равнобедренном треугольнике центры вписанной и описанной окружностей совпадают. Что из этого следует? А если отказаться от условия равнобедренности треугольника?

VII **11.** В данный круг вписана трапеция. Известны ее большее основание и угол при нем. Как найти у нее: а) другие стороны; б) диагонали; в) площадь; г) длины дуг, заключенные между ее вершинами; д) площади частей круга, на которые он разбит сторонами трапеции?

VII **12.** Предложите как можно больше способов нахождения радиуса некоторого реального круга. А как убедиться, что перед вами круг?

VII **13.** Предложите способ нахождения радиуса реального шара.

VII **14.** Представим себе глобус.

а) Что такое меридиан?

б) Что такое параллель?

в) Сколько параллелей проходит через данную точку на глобусе? А меридианов?

г) Как расположены между собой плоскости двух меридианов? двух параллелей? параллели и меридиана?

д) Может ли длина параллели равняться длине меридиана? быть больше длины меридиана? меньше этой длины?

е) Для каждой ли параллели найдется параллель такой же длины? в два раза более короткая? в два раза более длинная?

VII **15.** На некотором производстве делают металлические шарики. Шарики должны быть определенного размера, и те, которые не соответствуют этим размерам, являются бракованными. Предложите устройство для отделения качественных шариков от бракованных.

VII **16.** Цилиндр катится по плоскости так, что его ось параллельна самой себе. Какая фигура получается от движения оси?

VII **17.** Конус катится по плоскости так, что его вершина неподвижна. Какая фигура получается от движения оси?

VII **18.** Два равных шара хотят уложить в цилиндрическую коробку. Какие размеры может иметь такая коробка?

VIII ГЛАВА Другие методы геометрии

За тысячелетия в геометрии были созданы разнообразные методы решения задач. В предыдущих главах (за исключением главы VI) мы получали результаты методом, созданным еще в Древней Греции, но не утратившим и сейчас своего значения. В этой главе мы расскажем о других методах геометрии, созданных значительно позднее, в XVII—XX вв.,— координатном, векторном и методе геометрических преобразований — и покажем, как они применяются для решения задач. Выбрать для каждой задачи тот метод, которым она решается проще всего, красивее всего, очень важно.

§ 36 Метод координат

36.1 **Расстояние между точками.** Формула, которую мы выведем в этом пункте, опирается на теорему Пифагора и по существу является только другой ее формулировкой.

Теорема 35 *(о расстоянии между точками)*. **На координатной плоскости расстояние между точками равно корню квадратному из суммы квадратов разностей их координат.**

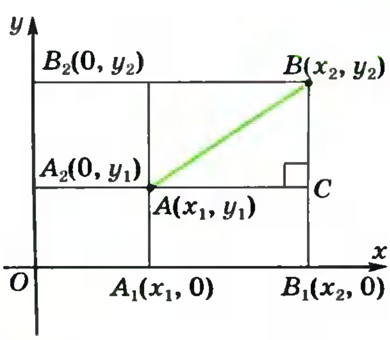


Рис. 331

Иначе говоря, если даны точки $A\ (x_1, y_1)$ и $B\ (x_2, y_2)$, то

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}.$$

• **Доказательство.** Рассмотрим общий случай, когда отрезок не перпендикулярен ни одной из координатных осей. Спроектируем точки A и B на оси координат *(рис. 331)*. Получим точки $A_1(x_1, 0)$ и $B_1\ (x_2, 0)$ на оси x и точки $A_2(0, y_1)$, $B_2(0, y_2)$ на оси y. Как вам известно, $A_1B_1=|x_2-x_1|$ и $A_2B_2=|y_2-y_1|$.

Опустим перпендикуляр AC на прямую BB_1. Получим прямоугольный треугольник ABC. По теореме Пифагора

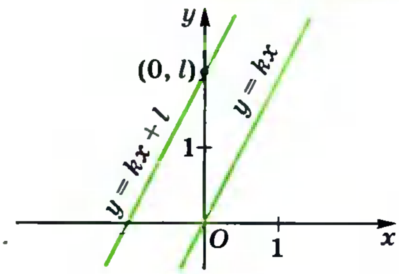


Рис. 332

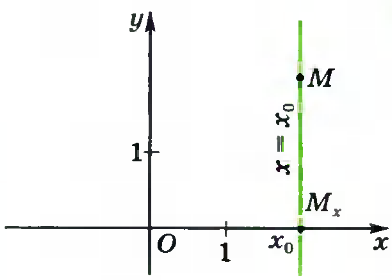


Рис. 333

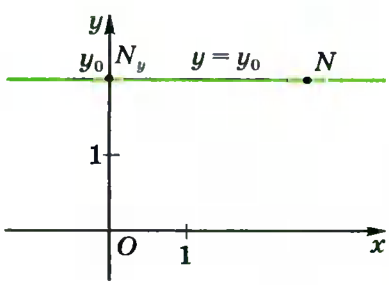


Рис. 334

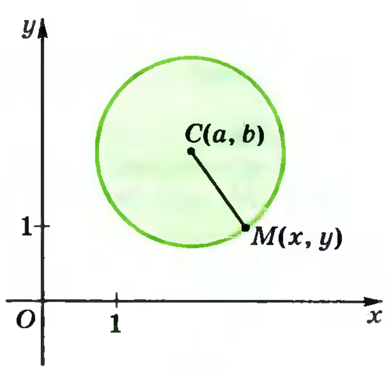


Рис. 335

$AB^2=AC^2+BC^2$. Поскольку $AC=A_1B_1$, то $AC=|x_2-x_1|$. Аналогично $BC=|y_2-y_1|$. Поэтому

$$AB^2=AC^2+BC^2=|x_2-x_1|^2+|y_2-y_1|^2=(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2.$$

Отсюда и следует утверждение теоремы для общего случая. Частные случаи, когда отрезок AB перпендикулярен одной из осей координат, рассмотрите самостоятельно.

Замечание. При вычислениях по этой формуле не имеет значения, какую из данных точек вы считаете первой, а какую — второй. Возведение в квадрат приведет к одному и тому же результату, хотя разности координат и будут различны.

36.2 **Понятие об уравнении фигуры.** Вам известно, что на координатной плоскости точки задаются парами чисел — их координатами. Вы также знаете, что уравнение $y=kx+l$ задает прямую (*рис. 332*).

Говорят, что **фигура F задается данным уравнением** в прямоугольных координатах, если точка принадлежит фигуре F тогда и только тогда, когда координаты этой точки удовлетворяют данному уравнению. Это означает, что выполняются два условия: 1) если точка принадлежит фигуре F, то ее координаты удовлетворяют данному уравнению; 2) если числа x, y удовлетворяют данному уравнению, то точка с такими координатами принадлежит фигуре F. Второе условие можно выразить иначе: координаты любой точки, не принадлежащей фигуре F, не удовлетворяют данному уравнению.

Например, прямая, перпендикулярная оси x и проходящая через точку $M_x(x_0, 0)$ на оси x, задается уравнением $x=x_0$ (*рис. 333*). (В частности, ось y имеет уравнение $x=0$.) Действительно, каждая точка, лежащая на этой прямой, имеет одну и ту же координату x. А любая точка, не лежащая на этой прямой, имеет другое значение координаты x, нежели x_0.

Аналогично прямая, перпендикулярная оси y, имеет уравнение $y=y_0$ (*рис. 334*). Ось x имеет уравнение $y=0$.

36.3 **Уравнение окружности.** Это уравнение мы выведем, используя формулу расстояния между точками. Пусть на плоскости введены прямоугольные координаты. Рассмотрим окружность с радиусом r и центром в точке $C\ (a, b)$. Если точка $M\ (x, y)$ принадлежит окружности, то ее расстояние от центра равно r, т. е. $MC=r$ (*рис. 335*). Это же равенство можно записать так: $MC^2=r^2$. Выразив расстояние MC через координаты точек M и C, получим:

$$(x-a)^2+(y-b)^2=r^2. \qquad (1)$$

Если же точка $M(x, y)$ не принадлежит окружности, то $MC\neq r$ и ее координаты не удовлетворяют уравнению (1). Следовательно, (1) — это уравнение окружности.

Если центр окружности лежит в начале координат, то $a=b=0$. Тогда (1) имеет совсем простой вид: $x^2+y^2=r^2$.

Декарт

36.4 Задание фигур неравенствами. Фигуры на плоскости задаются не только уравнениями, но и неравенствами. Например, на оси x неравенство $x \geqslant a$ задает луч, а неравенство $b \leqslant x \leqslant c$ — отрезок *(рис. 336)*.

Рис. 336

Говорят, что фигура задается данным неравенством в прямоугольных координатах, если точка принадлежит фигуре тогда и только тогда, когда координаты точки удовлетворяют данному неравенству.

Например, неравенством $y \geqslant 0$ задается верхняя полуплоскость, ограниченная осью x *(рис. 337)*, а неравенством $x^2 + y^2 \leqslant r^2$ задается круг с центром в точке $O(0, 0)$ и радиусом r (объясните это подробно) *(рис. 338)*.

36.5 Метод координат. Применяя метод координат, можно решать задачи двух видов.

1. Задавая фигуры уравнениями и выражая в координатах геометрические соотношения, мы применяем алгебру к геометрии.

2. Пользуясь координатами, можно истолковать алгебраические соотношения геометрически и применять геометрию к алгебре. Графические изображения функций — первый пример такого применения метода координат.

Применение координат в соединении с алгеброй составляет раздел геометрии, называемый **аналитической геометрией.** Аналитическая геометрия была создана в первой половине XVII в. в работах знаменитых французских ученых **Рене Декарта** (1596—1650) и **Пьера Ферма** (1601—1665).

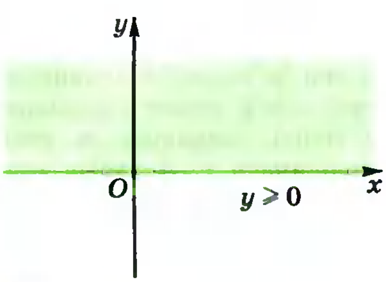


Рис. 337

Через метод координат геометрия и алгебра, соединяясь и взаимодействуя, дают богатые плоды, которые они не могли бы дать, оставаясь разделенными.

Обе возможности метода координат мы покажем на задаче, решенной еще знаменитым древнегреческим геометром **Аполлонием Пергским** (ок. 260 — ок. 170 гг. до н. э.). Методом координат она решается гораздо проще, чем чисто геометрическим методом (как, разумеется, и решал Аполлоний).

36.6 Окружность Аполлония.

Задача. **Что представляет собой множество точек плоскости, отношение расстояний от которых до двух данных точек есть величина постоянная?**

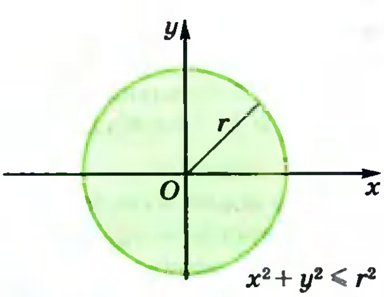


Рис. 338

Решение. Итак, пусть даны две точки A и B и некоторое положительное число k, равное отношению расстояний. Если $k = 1$, то множество точек M, для которых $\frac{MA}{MB} = 1$, т. е. $MA = MB$, является, как мы знаем, прямой — серединным перпендикуляром отрезка AB.

Рассмотрим теперь случай, когда $k \neq 1$. Пусть, например, $k = 2$. Решение задачи состоит из двух этапов.

1. Вывод уравнения фигуры (множества точек). Введем систему прямоугольных координат. Удобно ее начало

Ферма

выбрать в одной из данных точек, например в точке B, положительной полуосью x взять луч BA (рис. 339). Для удобства дальнейших вычислений будем считать, что точка A имеет координаты (3, 0). Возьмем точку $M(x, y)$, удовлетворяющую условию задачи, и выразим расстояния от нее до точек A и B по формулам (п. 31.5) $MA^2=(x-3)^2+y^2$, $MB^2=x^2+y^2$. Так как по условию $\frac{MA}{MB}=2$, то $MA^2=4\cdot MB^2$.

В координатах последнее равенство выражается так:

$$(x-3)^2+y^2=4(x^2+y^2). \qquad (1)$$

Отсюда, раскрыв скобки и приведя подобные, получаем:

$$x^2+y^2+2x=3. \qquad (2)$$

Выделяем полный квадрат по переменной x:

$$(x+1)^2+y^2=4. \qquad (3)$$

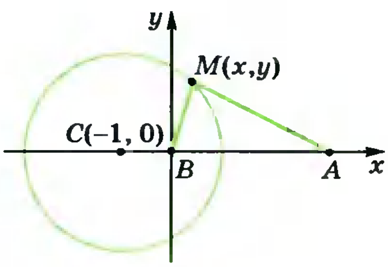


Рис. 339

Итак, точка $M(x, y)$ удовлетворяет условию $\frac{MA}{MB}=2$ тогда и только тогда, когда ее координаты удовлетворяют уравнению (3). Следовательно, искомая фигура задается уравнением (3). Первый этап решения задачи завершен.

2. **Геометрическое истолкование** выведенного уравнения. Нам известно (п. 36.3), что уравнение (3) задает окружность с центром в точке (−1, 0) и радиусом 2. Итак, если $k=2$, то решением задачи является эта окружность.

Попытайтесь повторить проведенные рассуждения и выкладки для произвольного числа $k\neq 1$, считая, что точка A имеет координаты $(a, 0)$. В результате вы должны прийти к такому уравнению:

$$\left(x-\frac{a}{1-k^2}\right)^2+y^2=\frac{a^2k^2}{(1-k^2)^2}.$$

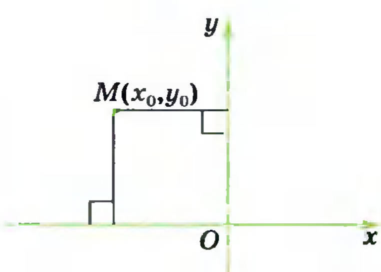


Рис. 340

Оно задает окружность (где ее центр, каков радиус?). Эта окружность и является решением задачи в общем случае.

Получить этот результат, не пользуясь координатами, не так просто.

36.7 Декартовы координаты в пространстве. Если на координатной плоскости положение точки задается упорядоченной парой чисел (рис. 340), то в пространстве, чтобы задать положение точки, необходимы уже три координаты. Система прямоугольных декартовых координат x, y, z в пространстве задается выбором начала координат точки O и трех попарно взаимно перпендикулярных координатных осей x, y и z, проходящих через точку O (рис. 341). Ось z называют осью **аппликат**. Обычно ось z представляют направленной вертикально вверх, а координатную плоскость xy, проходящую через оси x и y, — горизонтальной.

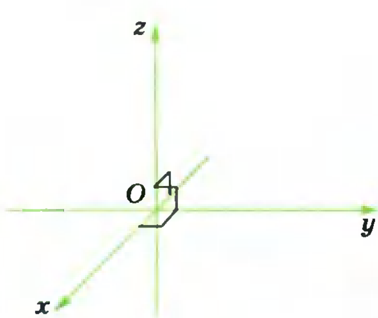


Рис. 341

Теперь для каждой точки M пространства упорядоченная тройка ее координат находится следующим образом. Точка M проектируется в точки M_1, M_2, M_3 на координатные оси x, y, z (рис. 342, а). Координаты x_0, y_0, z_0 этих точек на осях координат и составят тройку $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ координат точки M.

Теорема о трех перпендикулярах (п. 21.7) позволяет построить точки M_1 и M_2 так. Сначала проектируют точку M в точку M_0 на координатную плоскость xy (рис. 342, б), а затем точку M_0 на плоскости xy проектируют в точки M_1 и M_2 (рис. 342, в). Рисунок 342, в более нагляден, чем рисунок 342, а. Чтобы завершить построение — построить точку M_3, надо провести отрезок OM_0 и провести отрезок MM_3 параллельно отрезку OM_0 (рис. 342, г).

Заметим, что координаты точки в пространстве — это расстояния от нее до координатных плоскостей, взятые с соответствующим знаком. Если точка M не лежит ни в одной из координатных плоскостей, то эти расстояния — длины ребер прямоугольного параллелепипеда, ребрами которого являются отрезки OM_1, OM_2, OM_3 (рис. 342, д).

Итак, задав в пространстве систему прямоугольных декартовых координат, мы каждой точке пространства поставили в соответствие тройку ее координат. Верно и обратное: если задать упорядоченную тройку действительных чисел $(x_1,\ y_1,\ z_1)$, то можно в пространстве построить такую точку P, координатами которой будут числа x_1, y_1, z_1. Способ построения точки P можно понять, исходя из рисунка 342, г. Пространство, в котором задана система прямоугольных координат, мы будем называть **координатным пространством**.

Для формул и уравнений фигур на координатной плоскости и в координатном пространстве можно увидеть аналогию. Проиллюстрируем ее двумя примерами. Расстояние между точками $A\ (x_1,\ y_1,\ z_1)$ и $B\ (x_2,\ y_2,\ z_2)$ вычисляется по формуле

$$AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}. \qquad (1)$$

Эта формула аналогична формуле, выведенной в теореме 35 (п. 36.1). Она вытекает из этой теоремы и теоремы Пифагора, примененной к прямоугольному треугольнику ABC (рис. 343).

А из формулы (1) легко получается уравнение сферы с центром в точке $C\ (a,\ b,\ c)$ и радиусом R:

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2. \qquad (2)$$

Выводится оно так же, как выводится уравнение окружности в п. 36.3.

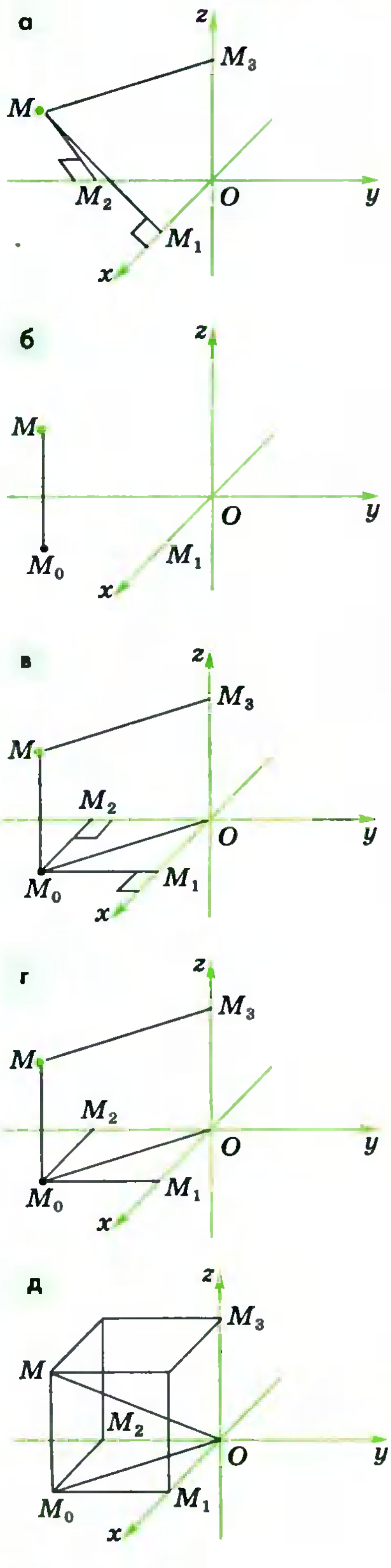


Рис. 342

1. В чем заключается метод координат?
2. Как называется раздел математики, изучающий этот метод? Кто его создатели?
3. Как записывается формула расстояния между точками?
4. Что означает фраза: «Фигура F задана уравнением»?
5. Уравнения каких линий на плоскости вам известны?

Задачи к § 36

36.1 **36.1.** Даны точки A $(-1,\ 1)$, B $(2,\ 3)$, C $(1,\ -2)$.
а) Вычислите стороны треугольника ABC. Установите его вид (по углам).
б) Как убедиться, что эти точки являются вершинами треугольника, а не лежат на прямой?

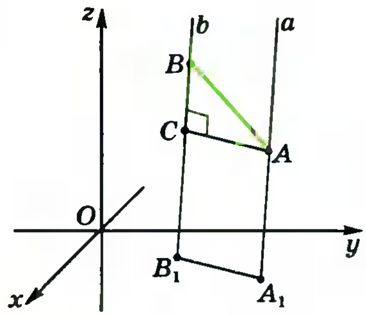


Рис. 343

36.2. Нарисуйте многоугольник $ABCDE$, где A $(1,\ 1)$, B $(-1,\ 2)$, C $(3,\ 2)$, D $(3,\ -1)$, E $(-1,\ -2)$. Вычислите:
а) длину самой длинной его стороны;
б) длину самой короткой его стороны;
в) длину самой длинной его диагонали;
г) длину самой короткой его диагонали;
д) его углы; е) его площадь.

36.2 **36.3.** Нарисуйте фигуру, заданную уравнением:
а) $x=1$; б) $y=-3$; в) $x(x-1)=0$; г) $(y+1)\ (y+2)=0$;
д) $(x-2)\ (y+4)=0$; е) $|x|=1$; ж) $|y|=2$; з) $(x-y)\ (x+y)=0$.

36.3 **36.4.** Нарисуйте фигуру, заданную неравенством:
а) $x\leqslant 5$; б) $y\geqslant -2$; в) $-1\leqslant x\leqslant 0$; г) $x\ (x-1)\geqslant 0$;
д) $y^2\leqslant 1$; е) $x^2\geqslant 4$; ж) $xy\geqslant 0$; з) $(x-3)\ (y+2)\leqslant 0$; и) $\frac{x+1}{y-1}\geqslant 0$.

36.5. Нарисуйте фигуру, заданную условием:
а) $x\leqslant y\leqslant 2x$; б) $-x\leqslant y\leqslant x$; в) $y\geqslant -x+1,\ y\leqslant x-1,\ x\leqslant 9$.

36.6. На координатной плоскости заданы точки A $(-2,\ 0)$, B $(0,\ 2)$, C $(2,\ 0)$, D $(0,\ -3)$. Запишите условия, которыми задаются: а) $\triangle BOC$; б) $\triangle ABC$; в) $\triangle BCD$; г) четырехугольник $ABCD$.

36.7. а) Окружность задана уравнением $x^2+y^2=21$. Не рисуя систему координат, установите расположение относительно нее точек A $(-1,\ 3)$, C $(\sqrt{3}, -\sqrt{2})$, B $(4,\ -5)$, D $(0,\ \sqrt{21})$.
б) Выполните то же задание для окружности, заданной уравнением $(x+1)^2+(y-2)^2=25$, и точек A $(-3,\ 0)$, B $(5,\ 0)$, C $(4,\ 2)$, D $(2,\ 7)$, E $(-4,\ 6)$, K $(3,\ 1)$, L $(-2,\ 3)$.

36.8. Напишите уравнение окружности:
а) с центром $(0,\ 0)$ и радиусом 2;
б) с центром $(-2,\ 1)$ и радиусом 3;
в) с центром $(-3,\ 0)$ и проходящей через точку $(-4,\ 1)$.

36.9. Найдите центр и радиус окружности, заданной уравнением:
а) $x^2+y^2=5$; б) $x^2+(y+5)^2=4$; в) $(x-2)^2+y^2=3$;
г) $(x+5)^2+(y-1)^2=2$; д) $(x+3)^2+(y+1)^2=1$; е) $x^2+y^2=a^2$.

36.10. Окружность задана уравнением $(x+3)^2+(y-4)^2=10$. Пересекает ли эта окружность:
а) ось x; б) ось y;
в) прямую, уравнение которой $y=-x$;
г) прямую, уравнение которой $y=x+2$;
д) окружность, уравнение которой $x^2+y^2=1$?

36.11. Нарисуйте фигуру, заданную условием:
а) $x^2+y^2=0$; б) $x^2+y^2\leqslant 4$; в) $x^2+y^2\geqslant 1$; г) $1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4$.

36.5 **36.12.** Точка A движется на координатной плоскости по прямой $y=x$. Из нее проведен отрезок AB длиной 1 по одну сторону от прямой. Напишите уравнение линии, по которой движется точка B, если:
а) AB параллельна оси y; б) AB параллельна оси x;
в) прямая AB перпендикулярна данной прямой.

36.13. Напишите уравнение линии, по которой движется на координатной плоскости точка K, такая, что $KA=KB$, если:
а) $A\ (0,\ 0)$, $B\ (4,\ 0)$; б) $A\ (0,\ 3)$, $B\ (0,\ -5)$.

36.14. Напишите уравнение линии, по которой движется на координатной плоскости точка K, такая, что $KA=2KB$, если:
а) $A\ (0,\ 0)$, $B\ (-3,\ 0)$; б) $A\ (4,\ 0)$, $B\ (1,\ 0)$; в) $A\ (0,\ -4)$, $B\ (0,\ -1)$.

36.15. По какой линии движется на координатной плоскости точка K, если она равноудалена от:
а) оси x и $A\ (0,\ 2)$;
б) оси x и $B\ (0,\ -2)$;
в) оси y и $C\ (2,\ 0)$;
г) оси y и $D\ (-2,\ 0)$?

36.16. По какой линии движется внутри прямого угла точка K, такая, что сумма расстояний от нее до сторон угла равна 1?

36.17. Внутри прямого угла O со сторонами a и b движется точка K. По какой линии она движется, если:
а) $|Ka|=|Kb|$;
б) $|Ka|=2|Kb|$;
в) $|KO|=2|Kb|$;
г) $|KO|=\frac{1}{2}|Ka|$?

36.18. а) Нарисуйте прямой угол с вершиной O. Нарисуйте несколько прямоугольников с периметром 12, две соседние стороны которых лежат на сторонах данного угла. На какой линии будет располагаться их вершина, не лежащая на сторонах данного угла?
б) Обобщите задачу а), считая, что периметр равен a.
в) Нарисуйте несколько прямоугольников, расположенных так же, как в задаче а), имеющих площадь, равную 12. На какой линии будет располагаться их вершина, не лежащая на сторонах данного угла?
г) Обобщите и задачу в).

36.19. Дан отрезок AB длиной 2. По какой линии движется точка K, такая, что:
а) $KA^2-KB^2=1$; б) $KA^2+KB^2=1$?
Попытайтесь обобщить эти задачи.

36.20. Используя метод координат, выясните, сколько общих точек могут иметь прямая и окружность. Для этого можно направить ось x по данной прямой, а ось y через центр окружности. Можно действовать иначе: выбрать начало координат в центре окружности, а ось x направить перпендикулярно прямой.

36.21. Используя метод координат, установите, сколько общих точек могут иметь две окружности. Для этого удобно выбрать начало координат в центре одной из этих окружностей, а ось x направить к центру другой. Можно иначе: начало координат поместить в середину отрезка с концами в центрах данных окружностей, а ось x направить по прямой, соединяющей их центры.

36.7 **36.22.** Укажите положение точки в координатном пространстве, если:
а) равна нулю лишь одна ее координата;
б) равны нулю две ее координаты.

36.23. а) Нарисуйте пространственную систему координат x, y, z и изображения точек $A\ (1,\ 2,\ 3)$, $B\ (-2,\ 1,\ 3)$, $C\ (2,\ -1,\ -3)$, $D\ (-1,\ -2,\ -3)$.
б) Найдите координаты проекций точек A, B, C, D на координатные плоскости и нарисуйте эти проекции.
в) Найдите координаты точек, симметричных точкам A, B, C, D относительно координатных плоскостей, и нарисуйте эти точки.
г) Найдите координаты проекций точек A, B, C, D на координатные оси и нарисуйте эти точки.
д) Найдите координаты точек, симметричных точкам A, B, C, D относительно координатных осей.

§ 37 Векторы и координаты

Созданный в XIX в. математический аппарат векторов оказался в сочетании с методом координат мощным средством для решения задач не только в физике, но и в математике. Покажем теперь, как применяются векторы в геометрии.

37.1 **Разложение вектора по осям координат.** Выполнять операции с векторами геометрически не всегда удобно. Например, надо сложить десять векторов, да еще умноженных на некоторые числа. Но если на плоскости ввести систему координат, то каждый вектор можно задать парой чисел — его проекциями на оси координат. И тогда окажется, что действия с векторами можно свести к аналогичным действиям с парами чисел, что куда проще. Следующая теорема вводит координаты вектора.

Теорема 36 *(о координатах вектора).* **Пусть на плоскости задана прямоугольная система координат. Единичные векторы осей x и y обозначим $\vec{i}$ и $\vec{j}$. Пусть $\vec{v}$ — некоторый вектор, а v_x и v_y — его проекции на оси координат. Тогда**

$$\vec{v}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}. \qquad (1)$$

Пара чисел v_x, v_y называется **координатами вектора** в данной системе координат.

• **Доказательство.** Отложим вектор $\vec{v}$ от начала координат — точки O. Получим вектор $\overrightarrow{OA}=\vec{v}$ *(рис. 344)*. Пусть точки A_1 и A_2 — проекции точки A на координатные оси x и y. Тогда

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_2} \qquad (2)$$

Как доказано в п. 30.2, $\overrightarrow{OA_1}=v_x\vec{i}$. Аналогично $\overrightarrow{OA_2}=v_y\vec{j}$. Подставляя эти равенства в (2), получаем (1).

Верно и утверждение о единственности координатного представления вектора:

если для вектора $\vec{v}$ выполняется равенство

$$\vec{v}=a\vec{i}+b\vec{j}, \qquad (3)$$

то пара чисел (a, b) является проекциями вектора $\vec{v}$ на оси x и y, т. е.

$$a=v_x,\ b=v_y. \qquad (4)$$

• Докажем его. Из равенств (1) и (3) следует, что

$$a\vec{i}+b\vec{j}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}.$$

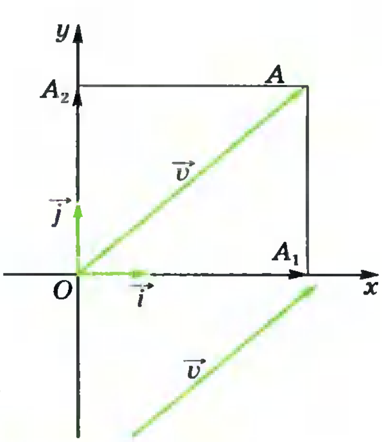


Рис. 344

Отсюда

$$a\vec{i} - v_x\vec{i} = v_y\vec{j} - b\vec{j}. \qquad (5)$$

Слева в (5) стоит вектор, коллинеарный вектору $\vec{i}$, а справа — вектор, коллинеарный вектору $\vec{j}$. Так как $\vec{i} \perp \vec{j}$, то $(a\vec{i} - v_x\vec{i}) \perp (v_y\vec{j} - b\vec{j})$. Взаимно перпендикулярные векторы равны лишь в одном случае — когда они нулевые. Поэтому $a\vec{i} - v_x\vec{i} = \vec{0}$ и $v_y\vec{j} - b\vec{j} = \vec{0}$. Следовательно, $a\vec{i} = v_x\vec{i}$ и $b\vec{j} = v_y\vec{j}$. По свойству 5 операции умножения вектора на число (п. 29.1) из этих равенств следуют равенства (5).

Таким образом, на координатной плоскости любой вектор $\vec{v}$ можно задать его координатами v_x, v_y и писать короче: $\vec{v} = (v_x;\ v_y)$ вместо равенства (1).

37.2 **Свойства координат вектора.** Прежде чем свести действия с векторами к действиям с их координатами, мы должны доказать свойства координат вектора. Так как они являются проекциями вектора на координатные оси, то свойства координат повторяют свойства проекций.

Свойство 1. **Координаты равных векторов соответственно равны.** Обратно: **векторы, имеющие соответственно равные координаты, равны.**

Первое утверждение вытекает из первого свойства проекций (п. 30.4). Второе вытекает из равенства (1).

Свойство 2. **При сложении векторов их соответствующие координаты складываются.** А именно если $\vec{a} = (a_x,\ a_y)$, $\vec{b} = (b_x,\ b_y)$ и $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, то $\vec{c} = (a_x + b_x,\ a_y + b_y)$, т. е.

$$c_x = a_x + b_x,\ c_y = a_y + b_y. \qquad (6)$$

Свойство 2 вытекает из второго свойства проекций (п. 30.4).

Свойство 3. **При умножении вектора на число его координаты умножаются на это число.** А именно если $\vec{a} = (a_x,\ a_y)$ и $\vec{b} = \alpha\vec{a}$, то $\vec{b} = (\alpha a_x,\ \alpha a_y)$, т. е

$$b_x = \alpha a_x,\ b_y = \alpha a_y. \qquad (7)$$

Свойство 3 вытекает из свойства 3 проекций вектора (п. 30.4). Это свойство позволяет по-другому сформулировать признак коллинеарности векторов (теорема 27, п. 29.2): **векторы $\vec{a} = (a_x,\ a_y)$ и $\vec{b} = (b_x,\ b_y)$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их координаты пропорциональны, т. е. выполняются равенства (7).**

● Действительно, если выполняются равенства (7), то $\vec{b} = \alpha\vec{a}$ и $\vec{b} \parallel \vec{a}$ (по теореме 27). Обратно: если $\vec{b} \parallel \vec{a}$, то $\vec{b} = \alpha\vec{a}$ (по теореме 27) и по свойству 3 выполняются равенства (7).

37.3 Свойства операций с векторами. Свойства координат позволяют свести действия с векторами к арифметическим действиям. Именно на этом основаны простые и единообразные доказательства важных свойств операций с векторами. Сформулируем их:

1. $\alpha(\beta\vec{a})=(\alpha\beta)\vec{a}$.
2. $(\alpha+\beta)\vec{a}=\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$.
3. $\alpha(\vec{a}+\vec{b})=\alpha\vec{a}+\alpha\vec{b}$.

Эти три свойства справедливы для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и любых чисел α, β. Докажем, например, второе из них.
• Пусть $\vec{a}=(a_x, a_y)$. Тогда $(\alpha+\beta)\vec{a}=((\alpha+\beta)a_x; (\alpha+\beta)a_y)$ по свойству 3 п. 30.4. Далее $\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}=(\alpha a_x+\beta a_x, \alpha a_y+\beta a_y)$. Но для чисел

$$(\alpha+\beta)a_x=\alpha a_x+\beta a_x \text{ и } (\alpha+\beta)a_y=\alpha a_y+\beta a_y.$$

Поэтому соответственные координаты векторов $(\alpha+\beta)\vec{a}$ и $\alpha\vec{a}+\beta\vec{a}$ равны. По свойству 1 п. 31.2 эти векторы равны.

Свойства 1 и 3 докажите самостоятельно.

37.4 Связь координат векторов и координат точек. Доказывая теорему 36 о разложении вектора по координатным осям, мы откладываем его от начала координат. Это вовсе необязательно. Например, отложим вектор $\vec{v}$ от точки $A(x_1, y_1)$, и пусть его концом будет точка $B(x_2, y_2)$ *(рис. 345)*. Спроектируем точки A, B в точки A_1, B_1 на ось x и в точки A_2, B_2 на ось y. Тогда $\overrightarrow{A_1B_1}=v_x\vec{i}$, $\overrightarrow{A_2B_2}=v_y\vec{j}$ и $\vec{v}=\overrightarrow{AB}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}$.

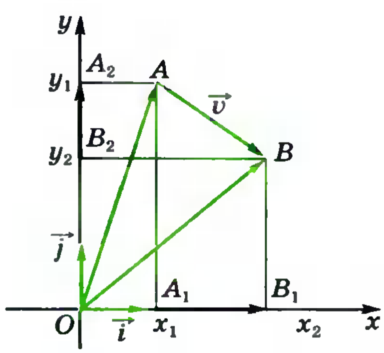


Рис. 345

Вычисляя проекции вектора через координаты его начала и конца (см. п. 30.3), получаем:

$$v_x=x_2-x_1,\ v_y=y_2-y_1. \qquad (8)$$

Поэтому

$$\vec{v}=\overrightarrow{AB}=v_x\vec{i}+v_y\vec{j}=(x_2-x_1)\vec{i}+(y_2-y_1)\vec{j}. \qquad (9)$$

Итак, чтобы найти координаты вектора, нужно от координат конца вектора отнять координаты начала вектора.

В частности, если вектор отложен от начала координат, то координаты вектора равны координатам его конца.

Теперь получим формулу, выражающую длину вектора через его координаты. Пусть $\vec{v}=\overrightarrow{AB}$, где $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$. Тогда $v_x=x_2-x_1$, $v_y=y_2-y_1$ и $\vec{v}=(v_x, v_y)=(x_2-x_1, y_2-y_1)$.

Мы знаем (п. 36.1), что $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

Значит, $|\vec{v}|=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{v_x^2+v_y^2}$.

37.5 Применение линейных операций с векторами. Линейными называют операции сложения, вычитания векторов и умножения вектора на число. Мы покажем сейчас, как

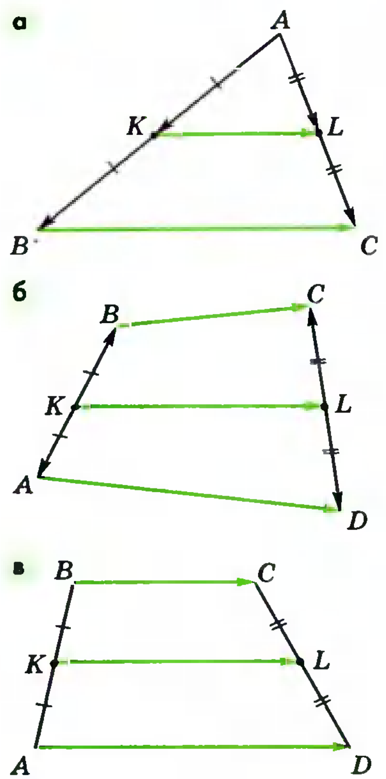


Рис. 346

применяются векторные методы, и возьмем для примера известную вам теорему о средней линии треугольника (п. 25.3).

Пусть точки K и L — середины сторон AB и AC треугольника ABC (рис. 346, а). Тогда $\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$. Поэтому $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{AL}-\overrightarrow{AK}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$. Из равенства $\overrightarrow{KL}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$ и следует, что $KL\parallel BC$ и $KL=\frac{1}{2}BC$, т. е. оба утверждения теоремы о средней линии.

А сейчас векторным методом получим результат, который вам не был известен. Рассмотрим четырехугольник $ABCD$. Пусть K и L — середины сторон AB и CD (рис. 346, б). Отрезок KL назовем **средней линией четырехугольника** $ABCD$. Тогда $\overrightarrow{KA}=-\overrightarrow{KB}$ и $\overrightarrow{LC}=-\overrightarrow{LD}$, а поэтому $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}=\vec{0}$ и $\overrightarrow{LC}+\overrightarrow{LD}=\vec{0}$. Далее, $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DL}$ и $\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{KB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CL}$. Сложив эти равенства, получаем $2\overrightarrow{KL}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$, т. е. $\overrightarrow{KL}=\frac{\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}}{2}$.

Как следствие получим такие свойства средней линии трапеции: **средняя линия трапеции параллельна ее основаниям и равна их полусумме** (рис. 346, в).

● Действительно, если $ABCD$ — трапеция с основаниями AD и BC, то $\overrightarrow{AD}\uparrow\uparrow\overrightarrow{BC}$, а потому $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}\uparrow\uparrow\overrightarrow{AD}$. Но тогда $\overrightarrow{KL}\uparrow\uparrow\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{KL}\parallel\overrightarrow{AD}$. Далее, так как $\overrightarrow{AD}\uparrow\uparrow\overrightarrow{BC}$, то $|\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}|=AD+BC$. Поэтому $KL=\frac{1}{2}(AD+BC)$.

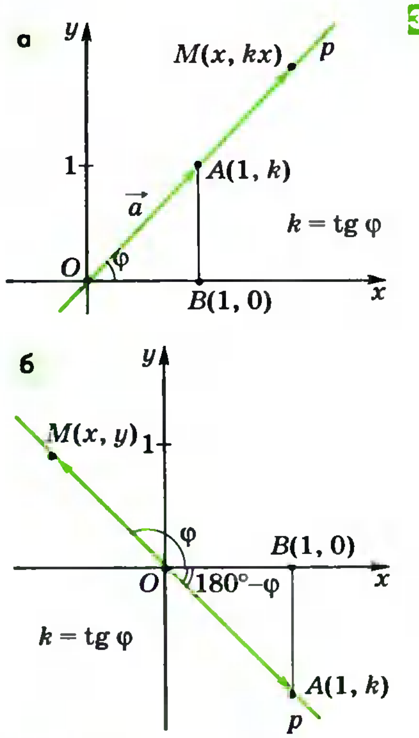


Рис. 347

37.6 Уравнение прямой.

Из курса алгебры вам известно, что **график p линейной функции $y=kx+l$ является прямой.** Но это утверждение осталось без доказательства. Сейчас мы его докажем.

● Начнем с функции $y=kx$. Возьмем вектор $\vec{a}=(1,\ k)$ и отложим его от начала координат: $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ (рис. 347, а). Возьмем теперь произвольную точку M $(x,\ kx)$ на прямой p и рассмотрим вектор $\overrightarrow{OM}$. Сделаем такие преобразования: $\overrightarrow{OM}=(x,\ kx)=x\ (1,\ k)=x\overrightarrow{OA}$. Равенство $\overrightarrow{OM}=x\overrightarrow{OA}$ означает, что точка M лежит на прямой OA и пробегает всю эту прямую, когда x изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. Итак, график p функции $y=kx$ является прямой, проходящей через O $(0,\ 0)$ и A $(1,\ k)$.

Число k называется **угловым коэффициентом прямой** p. Если φ — угол наклона p к оси x, то $k=\operatorname{tg}\varphi$.

● Действительно, пусть B $(1,\ 0)$ — проекция точки A на ось x. Если $k>0$ (рис. 347, а), то из прямоугольного треугольника OAB с катетами $OB=1$ и $AB=k$ получаем, что $\varphi=\angle AOB$ и $\operatorname{tg}\ \varphi=\frac{AB}{OB}=k$.

Если же $k<0$ (рис. 347, б), то $AB=-k$, $OB=1$ и $\angle AOB=180°-\varphi$. Поэтому $\operatorname{tg}(180°-\varphi)=-k$, т. е. снова $\operatorname{tg}\ \varphi=k$.

Рассмотрим теперь график p функции $y=kx+l$ для $l\neq 0$ (рис. 348). На графике возьмем две точки: C $(0,\ l)$ и

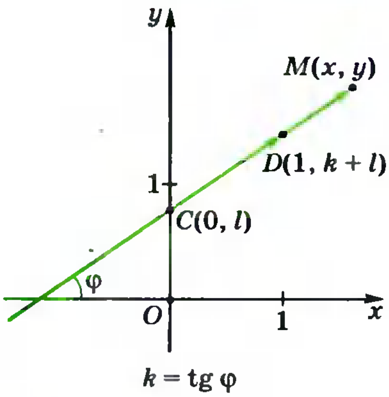


Рис. 348

D $(1,\ k+l)$. Тогда $\overrightarrow{CD}=(1,\ k)$. Покажем, что p — это и есть прямая CD. Возьмем произвольную точку M $(x,\ kx+l)$ на прямой p и рассмотрим вектор $\overrightarrow{CM}$. Сделаем такие преобразования: $\overrightarrow{CM}=(x,\ kx)=x\ (1,\ k)=x\overrightarrow{CD}$. Равенство $\overrightarrow{CM}=x\overrightarrow{CD}$ и означает, что точка M лежит на прямой CD и пробегает всю эту прямую, когда x изменяется от $-\infty$ до $+\infty$. Итак, график p функции $y=kx+l$ — прямая CD. Геометрический смысл углового коэффициента k останется тем же: он равен тангенсу угла наклона прямой p к оси x *(рис. 348, в)*.

Замечание. Вообще любое линейное уравнение $ax+by+c=0$ задает прямую, если хотя бы одно из чисел a, b отлично от 0. Если $b\neq 0$, то оно задает график линейной функции $y=-\frac{a}{b}x-\frac{c}{b}$. Если же $b=0$, то оно задает прямую, перпендикулярную оси x, уравнение которой $x=-\frac{c}{a}$.

37.7 Векторы в пространстве. Теория векторов, по существу, многомерна и для размерностей два (планиметрия) и три (стереометрия) во многом аналогична. Обратимся теперь к векторам в пространстве и проследим эту аналогию.

К сказанному в § 27 следует добавить понятие перпендикулярности направленного отрезка (вектора) к плоскости. Это понятие позволяет так сформулировать первый признак сонаправленности векторов в пространстве: **векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{CD}$ сонаправлены, если найдется такая плоскость α, что, во-первых, они перпендикулярны этой плоскости, и, во-вторых, лучи AB и CD лежат по одну сторону от этой плоскости** *(рис. 349, а)*.

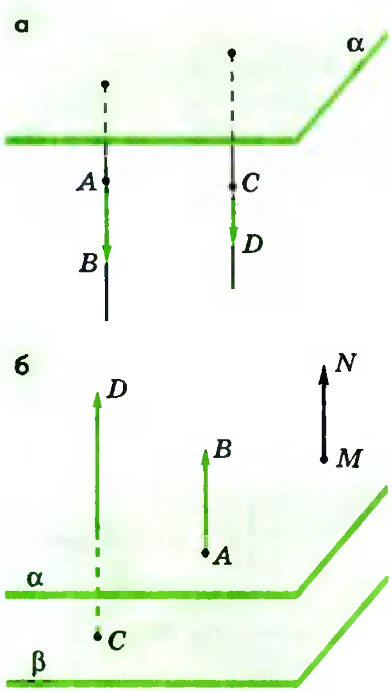


Рис. 349

А в доказательстве того, что два вектора, сонаправленные с третьим вектором, сонаправлены (теорема 23), речь пойдет не о прямых, а о плоскостях, перпендикулярных одной прямой MN *(рис. 349, б)*. Повторите это доказательство для пространственного случая.

Никаких других изменений в содержание § 27 вносить не нужно.

В содержании § 28 и 29 для векторов в пространстве дополнить следует лишь п. 28.6 о разложении вектора на составляющие. А именно: **в пространстве каждый вектор можно разложить (и притом единственным образом) на три вектора, лежащие на трех пересекающихся в одной точке прямых, если эти прямые не лежат в одной плоскости** *(рис. 350, а)*. При разложении вектора по трем пересекающимся прямым a, b, c в пространстве мы строим параллелепипед, диагональю которого является данный вектор и три ребра которого лежат на данных прямых.

Если прямые a, b, c попарно взаимно перпендикулярны, то составляющие вектора получаются, как и для плоскости, проектированием на эти прямые начала и конца вектора *(рис. 350, б)*.

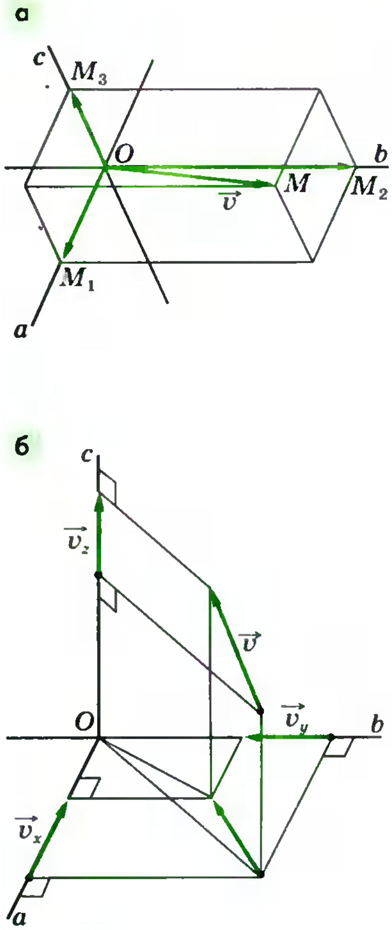


Рис. 350

Чтобы ввести координаты вектора, зададим в пространстве прямоугольную систему координат $Oxyz$ и обозначим единичные векторы координатных осей $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ (рис. 351, а). Координатами вектора $\vec{v}$ на координатной плоскости xy мы назвали (п. 37.1) его проекции v_x и v_y на координатные оси и доказали, что

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}. \tag{1}$$

И в пространстве координатами вектора $\vec{v}$ называются его проекции v_x, v_y, v_z на координатные оси, и имеет место равенство

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}. \tag{2}$$

Проще всего убедиться в справедливости равенства (2) можно, если отложить вектор $\vec{v}$ от начала координат и разложить его по координатным осям:

$$\vec{v} = \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OM}_1 + \overrightarrow{OM}_2 + \overrightarrow{OM}_3 = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k} \tag{3}$$

(рис. 351, б). Заметим, что координаты v_x, v_y, v_z вектора $\vec{v} = \overrightarrow{OM}_2$— это координаты точки M в заданной системе прямоугольных координат.

Если же вектор $\vec{v}$ отложен от произвольной точки A, т. е. $\vec{v} = \overrightarrow{AB}$, то его координаты v_x, v_y, v_z выражаются через координаты начала A (x_A, y_A, z_A) и конца B (x_B, y_B, z_B) по формулам

$$v_x = x_B - x_A,\quad v_y = y_B - y_A,\quad v_z = z_B - z_A \tag{4}$$

(рис. 351, в).

Если вектор $\vec{v}$ отложен от начала координат ($\vec{v} = \overrightarrow{OM}$), то его модуль (в общем случае) — это длина диагонали OM прямоугольного параллелепипеда с ребрами OM_1, OM_2, OM_3 (рис. 351, б). Длины этих ребер равны модулям проекций v_x, v_y, v_z вектора $\vec{v}$. Применяя теорему Пифагора к треугольникам OM_1M_0 и OM_0M, получаем, что $OM^2 = OM_1^2 + OM_2^2 + OM_3^2$. Поэтому

$$|\vec{v}|^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2. \tag{5}$$

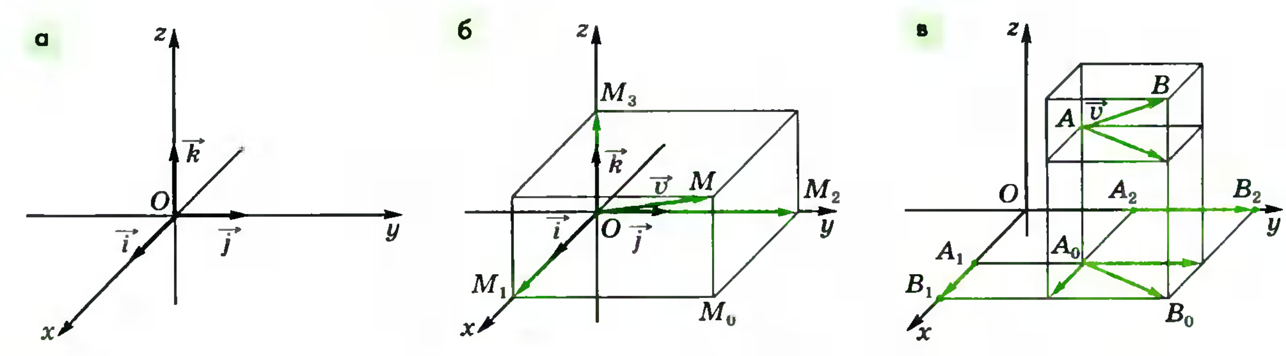


Рис. 351

1. Для чего вводятся координаты вектора?
2. Как найти координаты вектора?
3. Какие свойства имеют координаты вектора?
4. Какие свойства действий с векторами доказываются с помощью координат векторов?
5. Как вычислить длину вектора, заданного координатами?
6. Какую фигуру на плоскости задает линейное уравнение?
7. Каков геометрический смысл углового коэффициента прямой, заданной уравнением $y = kx + l$?

Задачи к § 37

37.1 **37.1.** Какие координаты имеет единичный вектор, образующий с осью x угол φ? (Углу φ придайте значения 0°, 30°, 45°, 60°, 90°, 120°, 135°, 150°, 180°.)

37.2. Нарисуйте вектор $\overrightarrow{OA}$, координаты которого: а) (0, 1); б) (2, 0); в) (−3, 1); г) (2,−3); д) (−4, −2). Вычислите угол, который он образует с осью x.

37.2 **37.3.** Даны векторы $\vec{a} = (1, -2)$ и $\vec{b} = (-3, -1)$. Каковы координаты векторов $2\vec{a}$, $-3\vec{b}$, $\vec{a} + \vec{b}$, $-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{2}{3}\vec{b}$?

37.4. Какие координаты имеют векторы:
а) $\vec{i} + \vec{j}$; б) $-\vec{i} + \vec{j}$; в) $\vec{i} - \vec{j}$; г) $-\vec{i} - \vec{j}$; д) $-2\vec{i} + 3\vec{j}$; е) $\frac{1}{2}\vec{i} - \frac{3}{2}\vec{j}$?

37.5. Коллинеарны ли векторы:

а) (−2, 1) и (4, 2); б) (1,−3) и (1, 3); в) (3,−2) и (−3, 2);
г) (1, 0) и (3, 0); д) (0,−1) и (1, 0); е) (0, 0) и (−2, 1)?

37.6. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны. Запишите их недостающие координаты:

а) $\vec{a} = (1, -2)$, $\vec{b} = (3, \ldots)$; б) $\vec{a} = (\ldots, 2)$, $\vec{b} = (4, -1)$;
в) $\vec{a} = (-2, \ldots)$, $\vec{b} = (\ldots, -2)$; г) $\vec{a} = (-1, \ldots)$, $\vec{b} = (2, \ldots)$.

37.7. Пусть $\vec{a} = (1, -1)$. Запишите координаты вектора: а) противоположного вектору $\vec{a}$; б) коллинеарного вектору $\vec{a}$.

37.3 **37.8.** Упростите выражения:
а) $5 \cdot (-3\vec{a})$; б) $-2 \cdot (-4\vec{x})$; в) $-3\vec{p} + 2\vec{p}$; г) $4\vec{b} - 2\vec{b}$; д) $2\vec{a} - 2\vec{b}$; е) $\frac{1}{4}\vec{a} + \frac{3}{4}\vec{a}$.

37.9. В параллелограмме $ABCD$ диагонали пересекаются в точке O. Выразите через $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AD}$ векторы $\overrightarrow{AO}$, $\overrightarrow{BO}$, $\overrightarrow{CO}$.

37.10. В треугольнике ABC точка K — середина AC, точка L — середина AB, точка M — середина BC. Пусть $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$ и $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$. Выразите через $\vec{a}$ и $\vec{b}$ векторы:
а) $\overrightarrow{AM}$; б) $\overrightarrow{BK}$; в) $\overrightarrow{CL}$; г) $\overrightarrow{KM}$; д) $\overrightarrow{KL} + \overrightarrow{LM}$; е) $\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{CL} + \overrightarrow{BK}$.

37.4 **37.11.** Каковы координаты вектора $\overrightarrow{AB}$ и его длина, если:

а) A (0, 1), B (1, 0); б) A (−2, 1), B (−4, 2);
в) A (−1, −3), B (−3, −1); г) A (p, q), B ($-p$, $-q$)?

37.12. От точки A отложили вектор $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.
а) Каковы координаты точки B, если A (1, 0), $\vec{a} = (0, 1)$?
б) Каковы координаты точки A, если B (−2, −1), $\vec{a} = (-1, -2)$?

37.13. Заданы точки A (−1, 3), B (2, −4), C (−3, −1), D (5, 2). Равны ли векторы $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{DB}$? Вычислите координаты векторов:
а) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; б) $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}$; в) $2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{BD}$; г) $-\frac{1}{3}\overrightarrow{CD} + \frac{3}{2}\overrightarrow{BA}$.

37.14. а) Постройте точку A_1, такую, что $\overrightarrow{OA_1} = (1, -2)$. Постройте точку A_2, такую, что $\overrightarrow{A_1A_2} = (-2, 3)$. Какие координаты имеет точка A_2?
б) Обобщите задачу а).

37.15. Пусть $\vec{a}=(-2,\ 1)$, $\vec{b}=(2,\ -3)$. Найдите длины векторов:

а) $\vec{a}$; б) $\vec{b}$; в) $-\vec{a}$; г) $3\vec{b}$; д) $\vec{a}-\vec{b}$; е) $\frac{1}{2}\vec{a}-2\vec{b}$; ж) $-3\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$.

37.16. а) Пусть длина вектора равна 1, а его проекция на ось x равна 0,5. Чему равна его проекция на ось y?

б) Длина вектора равна 2, а его проекция на ось y равна -1. Чему равна его проекция на ось x?

в) Может ли одна из координат вектора равняться его длине? А обе координаты?

37.5 **37.17.** В треугольнике ABC на сторонах AB и AC выбраны точки K и L так, что $AK:AB=AL:AC=x$. Докажите, что $\overrightarrow{KL}=x\cdot\overrightarrow{BC}$. Что отсюда следует?

37.18. Точка C — середина отрезка AB, а точка O — любая точка плоскости.

а) Докажите, что $\overrightarrow{OC}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})$.

б) Докажите, что $OC\leqslant\frac{1}{2}(OA+OB)$. При каком расположении точек возможно равенство?

в) Докажите утверждение, обратное а).

37.19. а) Докажите теорему о средней линии треугольника тем же приемом, каким был получен результат о средней линии четырехугольника в п. 37.5.

б) Из результата задачи о средней линии четырехугольника получите неравенство $KL\leqslant\frac{1}{2}(AD+BC)$.

в) В каком случае возможно равенство?

37.20. Используя векторные методы, докажите, что координаты середины отрезка равны полусумме соответствующих координат его концов.

37.21. Докажите, что уравнением прямой, проходящей через точку $(x_0,\ y_0)$, с угловым
37.6 коэффициентом k является такое уравнение $y-y_0=k(x-x_0)$.

37.22. Чему равен угловой коэффициент прямой:

а) заданной уравнением: 1) $y=\frac{1}{2}x$; 2) $y=-3x+1$; 3) $-2x-3y=1$; 4) $x=y+1$; 5) $y=-2$; 6) $x=1$;

б) проходящей через точки $(0,\ 1)$ и $(-2,\ 3)$?

37.23. Напишите уравнение прямой, проходящей через точку $(-2,\ -1)$ и имеющей угловой коэффициент: а) $\frac{1}{3}$; б) -2; в) 0.

37.24. а) Две прямые, не перпендикулярные оси x, параллельны. Докажите, что их угловые коэффициенты равны. Проверьте обратное.

б) Как, используя результаты, полученные в задаче а), узнать, лежат ли три точки на одной прямой?

37.25. Дана точка $(3,\ -1)$. Напишите уравнение прямой, проходящей через эту точку и:

а) параллельной оси x; б) параллельной оси y;

в) образующей с осью x угол 45°; г) образующей с осью x угол 150°;

д) параллельной прямой, уравнение которой $y=x+1$;

е) параллельной прямой, уравнение которой $2x+3y+1=0$;

ж) перпендикулярной прямой $y=x$.

37.7 **37.26.** Даны точки A $(1,\ -1,\ 5)$ и B $(4,\ 3,\ -7)$.

а) Каковы координаты вектора $\overrightarrow{AB}$?

б) Чему равна его длина?

в) Каковы координаты вектора $\overrightarrow{BA}$?

г) Каковы координаты точки K, где точка K — середина отрезка AB?

д) Каковы координаты вектора $\overrightarrow{AK}$?

37.27. Заданы вершины A $(1,\ 2,\ 3)$, B $(-2,\ 1,\ -4)$ и C $(0,\ -2,\ 2)$ параллелограмма $ABCD$. Найдите координаты его вершины D и координаты точки пересечения его диагоналей.

37.28. Ребро куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ равно 2. Найдите координаты векторов $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AB_1}$, $\overrightarrow{AC_1}$, $\overrightarrow{B_1D}$, если:

а) начало координат находится в точке A, а оси координат направлены по лучам AB, AD, AA_1;

б) начало координат находится в центре O грани $ABCD$, а оси координат имеют те же направления;

в) начало координат находится в центре куба, а оси координат поменяли направления на противоположные.

37.29. Пусть $\vec{a}$ — единичный вектор, а α, β, γ — углы, которые он составляет с векторами осей координат. Докажите, что $\vec{a}=(\cos\alpha,\ \cos\beta,\ \cos\gamma)$ и $\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$.

§ 38 Скалярное умножение

38.1 **Определение скалярного произведения.** В дальнейшем мы используем еще одну операцию с векторами. Из курса физики известно, что механическая работа A, совершаемая постоянно силой F при перемещении s тела *(рис. 352)*, равна произведению $A=|\vec{F}|\,|\vec{s}|\cos\varphi$, где $\varphi=\angle\vec{F}\vec{s}$. Число $|\vec{F}|\,|\vec{s}|\cos\varphi$ для векторов $\vec{F}$ и $\vec{s}$ называется скалярным произведением этих векторов.

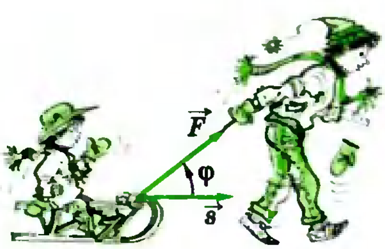


Рис. 352

Итак, **скалярным произведением** двух ненулевых векторов называется произведение их модулей и косинуса угла между ними.

Скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ обычно обозначают $\vec{a}\cdot\vec{b}$. Таким образом, по определению

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}|\,|\vec{b}|\cos\varphi,\ \text{где}\ \varphi=\angle\vec{a}\vec{b}. \qquad (1)$$

Если хотя бы один из векторов нулевой, то полагают $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$.

Отметим два важных частных случая:

1) Если $\vec{a}=\vec{b}$, то $\varphi=0°$, $|\vec{a}|=|\vec{b}|$ и из (1) следует, что $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2$. Произведение $\vec{a}\cdot\vec{a}$ обозначается $\vec{a}^{\,2}$ (оно называется **скалярным квадратом вектора** $\vec{a}$). Итак, $\vec{a}^{\,2}=|\vec{a}|^2$.

2) Для любых ненулевых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ их скалярное произведение $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ тогда и только тогда, когда $\vec{a}\perp\vec{b}$. Действительно, если $\vec{a}\neq\vec{0}$ и $\vec{b}\neq\vec{0}$, то из (1) следует, что $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ тогда и только тогда, когда $\cos\varphi=0$, т. е. при $\vec{a}\perp\vec{b}$.

38.2 **Выражение скалярного произведения через координаты.** Докажем, что скалярное произведение векторов равно сумме произведений одноименных координат этих векторов. Это значит, что для векторов $\vec{a}=(x_1,\ y_1)$ и $\vec{b}=(x_2,\ y_2)$ их скалярное произведение вычисляется по формуле

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_1x_2+y_1y_2. \qquad (2)$$

• Рассмотрим сначала случай, когда $\vec{a}$ и $\vec{b}$ не коллинеарны. Отложим $\vec{a}$ и $\vec{b}$ от начала координат O. Получим векторы $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ *(рис. 353)*. Точка A имеет координаты x_1, y_1, а точка B — координаты x_2, y_2. В треуголь-

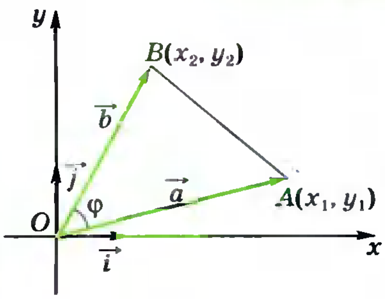


Рис. 353

нике OAB $\angle O = \angle \vec{a}\vec{b}$. Положим $\varphi = \angle \vec{a}\vec{b}$ и вычислим по ОТП (см. п. 25.1) сторону AB треугольника OAB. Получим:

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos \varphi, \qquad (3)$$

но $OA \cdot OB \cos \varphi = |\vec{a}|\ |\vec{b}| \cos \varphi$, т. е. $OA \cdot OB \cdot \cos \varphi = \vec{a} \cdot \vec{b}$.

Используем последнее равенство и получим из (3), что

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \frac{1}{2}\ (OA^2 + OB^2 - AB^2). \qquad (4)$$

По формуле расстояния между двумя точками (п. 36.1)

$$OA^2 = x_1^2 + y_1^2,\ OB^2 = x_2^2 + y_2^2,\ AB^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2. \qquad (5)$$

Подставляя эти выражения в (4) и упрощая, получаем (1).

Если же векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны, то один из них получается из другого умножением на число. Пусть, например, $\vec{b} = k\vec{a}$. Тогда $x_2 = kx_1$, $y_2 = ky_1$. Дальнейшие рассуждения проведите самостоятельно.

Выводя формулу для скалярного произведения двух векторов $\vec{a}(x_1, y_1, z_1)$ и $\vec{b}\ (x_2, y_2, z_2)$ в пространстве, надо повторить проведенные рассуждения и воспользоваться формулой (1) из п. 36.7 для расстояния между точками в пространстве. Тогда получим, что

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

38.3 Свойства скалярного умножения. Следующие свойства выполняются для любых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и любого числа x:

---

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.
2. $(x\vec{a}) \cdot \vec{b} = x(\vec{a} \cdot \vec{b})$.
3. $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.

Все эти свойства следуют из формулы (2). Проверим, например, свойство 3.

• Положим $\vec{a} = (x_1, y_1)$, $\vec{b} = (x_2, y_2)$ и $\vec{c} = (x_3, y_3)$. Тогда $\vec{a} + \vec{b} = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2)$. Поэтому

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = (x_1 + x_2)\ x_3 + (y_1 + y_2)\ y_3 = x_1x_3 + x_2x_3 + y_1y_3 + y_2y_3.$$

Но и $\vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c} = x_1x_3 + y_1y_3 + x_2x_3 + y_2y_3$.

Следовательно, $(\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$.

Замечание. Если понимать векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как силы, действующие на тело, а вектор $\vec{c}$ как перемещение этого тела, то свойство 3 можно понимать так: работа, совершаемая результирующей силой $\vec{a} + \vec{b}$ при перемещении $\vec{c}$, равна сумме работ, совершенных силами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ при том же перемещении $\vec{c}$.

Доказанные свойства вместе со свойствами сложения векторов позволяют скалярно умножать суммы и разности векторов по правилам обычной алгебры.

Например,

$$(\vec{a} + \vec{b})^2 = (\vec{a} + \vec{b}) \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a}^2 + \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{a} + \vec{b}^2 = \\ = \vec{a}^2 + 2\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b}^2.$$

38.4. **Применение скалярного умножения.** Используя скалярное умножение, некоторые теоремы можно доказать очень просто. Докажем, например, такую теорему: **сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.**

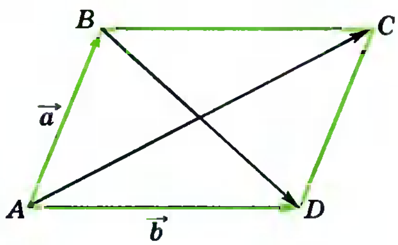


Рис. 354

• Пусть $ABCD$ — параллелограмм (*рис. 354*). Возведем в скалярный квадрат равенства $\overrightarrow{AC}=\vec{a}+\vec{b}$ и $\overrightarrow{BD}=\vec{b}-\vec{a}$, где $\overrightarrow{AB}=\vec{a}$ и $\overrightarrow{AD}=\vec{b}$. Получим $\overrightarrow{AC}^2=\vec{a}^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$ и $\overrightarrow{BD}^2=\vec{b}^2-$ $-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}^2$.

Сложим полученные равенства и придем к нужному результату: $AC^2+BD^2=2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2)=AB^2+BC^2+CD^2+AD^2$.

Еще пример. Для любых точек A, B, C, D выполняется равенство

$$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}. \qquad (6)$$

• Действительно, пусть $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{AC}=\vec{c}$, $\overrightarrow{AD}=\vec{d}$. Тогда $\overrightarrow{BD}=\vec{d}-\vec{b}$, $\overrightarrow{CD}=\vec{d}-\vec{c}$, $\overrightarrow{BC}=\vec{c}-\vec{b}$ и (6) сводится к легко проверяемому равенству $\vec{c}\cdot(\vec{d}-\vec{b})=\vec{b}\cdot(\vec{d}-\vec{c})+\vec{d}\cdot(\vec{c}-\vec{b})$.

Выполнив действия и упростив полученный результат в правой части равенства (6), мы придем к тому же выражению.

Из равенства (6) вытекает такой любопытный результат: **все высоты треугольника (или их продолжения) пересекаются в одной точке** (*рис. 355*).

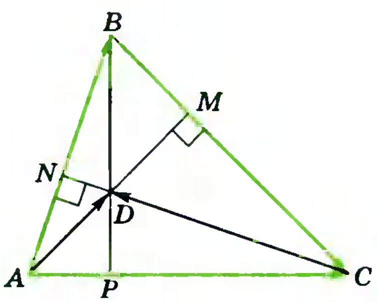


Рис. 355

• Действительно, пусть точка D — точка пересечения высот AM и CN треугольника ABC или их продолжений. Тогда $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ и $\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{AB}=0$. Поэтому из равенства (6) получаем, что $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$, т. е. $BD\perp AC$. Значит, третья высота BP треугольника (или ее продолжение) проходит через точку D.

1. Как вычислить скалярное произведение двух векторов?
2. Когда скалярное произведение векторов равно 0?
3. Какие свойства имеет скалярное умножение? В чем оно похоже на умножение чисел? А в чем разница?

Задачи к § 38

38.1. Докажите, что выполняются такие равенства:

а) $|\vec{a}|=\sqrt{\vec{a}^2}$; б) $\cos\angle\vec{a}\vec{b}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$.

38.1 **38.2.** Каков знак скалярного произведения векторов, если угол между ними: а) острый; б) тупой? Проверьте обратные утверждения.

38.3. Вычислите скалярное произведение векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$, если $|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$ и $\angle\vec{a}\vec{b}$ равен: а) 45°; б) 60°; в) 135°; г) 150°; д) 90°; е) 0°; ж) 180°.

38.4. Докажите, что $-|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\leqslant\vec{a}\cdot\vec{b}\leqslant|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$. При каких условиях выполняются равенства?

38.5. Дан квадрат $ABCD$ со стороной 1. Вычислите:
а) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{DC}$; б) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{CB}$; в) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{DC}$; г) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}$; д) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{DC}$; е) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{CD}$; ж) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$.

38.6. Дан равносторонний треугольник ABC со стороной 1. Точка K — середина BC, точка M — середина AC. Вычислите:
а) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}$; в) $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC}$; г) $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{BC}$; д) $\overrightarrow{AK}\cdot\overrightarrow{BM}$; е) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA})\cdot\overrightarrow{KM}$.

38.7. Докажите, что скалярное произведение единичных векторов равно косинусу угла между ними.

38.2 **38.8.** Вычислите скалярное произведение векторов: а) (0, 3) и (−2, 0); б) (−5, 7) и (2,−1); в) (−3, 1) и (−1,−3).

38.9. Дан вектор $\vec{a}=(2, 3)$.
а) Найдите координаты вектора, перпендикулярного $\vec{a}$.
б) Найдите координаты единичного вектора, перпендикулярного $\vec{a}$.

38.10. Даны векторы $\vec{a}=(1, 2)$ и $\vec{b}=(-2, 3)$. Вычислите: а) $2\vec{a}\cdot\vec{b}$; б) $\vec{a}\cdot(-3\vec{b})$;
в) $(-\frac{1}{2}\vec{a})\cdot\left(\frac{1}{3}\vec{b}\right)$; г) $\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b})$; д) $(\vec{a}+\vec{b})^2$; е) $(\vec{a}-\vec{b})^2$; ж) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b})$.

38.11. Пусть A (−1, 2), B (−2,−3), C (1, 4), D (4,−2). Вычислите:
а) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$; б) $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}$; в) $(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD})\cdot(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BD})$.

38.3 **38.12.** Докажите равенства:
а) $\vec{a}\cdot(\vec{b}-\vec{c})=\vec{a}\cdot\vec{b}-\vec{a}\cdot\vec{c}$; б) $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{c}+\vec{d})=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{a}\cdot\vec{d}+\vec{b}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{d}$;
в) $(x\vec{a})\cdot(y\vec{b})=(xy)\cdot(\vec{a}\vec{b})$; г) $(\vec{a}-\vec{b})^2=\vec{a}^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}^2$.

38.13. Преобразуйте выражения:
а) $(\vec{a}+2\vec{b})\cdot(3\vec{a}-\vec{b})$; б) $(-\frac{1}{2}\vec{a}+\vec{b})\cdot(-\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b})$; в) $\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b})-\vec{b}\cdot(\vec{a}+\vec{b})$.

38.14. Векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ единичные, $\angle\vec{a}\vec{b}=30°$, $\angle\vec{b}\vec{c}=60°$, $\angle\vec{a}\vec{c}=30°$. Вычислите:
а) $(\vec{a}+\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{c})$; б) $(2\vec{a}-\vec{b})\cdot(\vec{a}+2\vec{b})$; в) $(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})\cdot(\vec{b}-\vec{c})$; г) $(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})^2$.

38.4 **38.15.** Вычислите угол между векторами:
а) (1, 0) и (1, 2); б) (−2, 0) и (1, −1); в) (3, 2) и (2, 3).

38.16. Вернитесь к задаче 38.11. Вычислите:
а) длины векторов $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{CD}$;
б) углы между векторами $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CA}$ и $\overrightarrow{CB}$.

38.17. Докажите, что диагонали ромба перпендикулярны. Верно ли обратное утверждение?

38.18. $ABCD$ — четырехугольник. Докажите, что $AC\perp BD$ тогда и только тогда, когда $AD^2+BC^2=AB^2+CD^2$.

§ 39 Движения и равенство фигур

39.1 **Преобразования фигур.** В начале курса геометрии мы говорили, что самая первая задача геометрии состоит в том, чтобы дать точно обоснованные правила для построения фигур с заданными свойствами. Мы решали эту задачу в основном для треугольников. Для более сложных фигур пока еще не имеем определения их равенства (хотя, конечно, каждый может отличить равные фигуры от неравных). Реальные построения обычно предполагают построение равных фигур, в частности фигур, обладающих свойствами симметрии. Например, фасады большинства до-

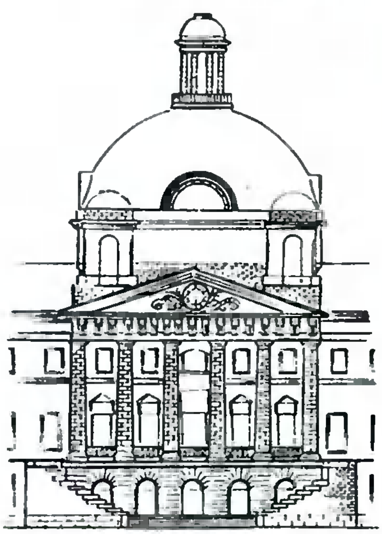


Рис. 356

мов симметричны *(рис. 356)* и окна на этих фасадах расположены в правильном порядке. Как начертить план такого фасада или как, начертив на плане одно из окон, получить на плане изображения остальных окон?

Решение таких задач связано с преобразованием одних фигур в другие фигуры. Пусть задана некоторая фигура F и каждой точке фигуры F сопоставлена (ставится в соответствие) некоторая точка плоскости. Множество точек, сопоставленных точкам фигуры F, является некоторой фигурой F', вообще говоря, отличной от F *(рис. 357)*. Говорят, что фигура F' получена **преобразованием** фигуры F. Можно сказать также, что фигура F' является **образом фигуры** F для данного преобразования.

Если X' — точка фигуры F', соответствующая точке X фигуры F, то говорят, что X' — **образ точки** X.

39.2 Движения фигур. Самыми важными являются такие преобразования фигур, при которых сохраняются все их геометрические свойства — расстояния между точками, углы, площади, параллельность отрезков и т. д. Оказывается, чтобы это выполнялось, достаточно потребовать сохранения лишь расстояний между точками фигуры. Тогда у полученной фигуры сохранятся и все остальные геометрические свойства — площади, углы и т. д., поскольку все они зависят только от расстояний.

Определение. Преобразование фигуры, которое сохраняет расстояние между точками, называется **движением** этой фигуры.

Подробнее: фигура F' получена движением фигуры F, если любым точкам X, Y фигуры F сопоставляются такие точки X', Y' фигуры F', что $X'Y'=XY$ *(рис. 358, а)*.

Замечание. Со словом «движение» обычно связывается представление о движениях реальных тел, когда тело меняет свое положение без деформаций, т. е. без изменений расстояний в нем. В геометрии движение — это отвлеченный образ реальных движений. Геометрическую фигуру нельзя передвинуть в буквальном смысле слова, как нельзя передвинуть участок земли. Рисунок на бумаге тоже нельзя передвинуть, это можно проделать с самой бумагой, но не с рисунком на ней *(рис. 358, б)*.

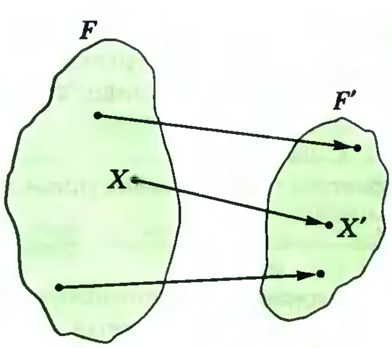


Рис. 357

39.3 Свойства движений. Движение фигуры имеет важные свойства, которые мы сейчас поясним.

Свойство 1. Три точки, лежащие на одной прямой, при движении переходят в три точки, лежащие на одной прямой, а три точки, не лежащие на одной прямой, — в три точки, не лежащие на одной прямой.

• **Доказательство.** Пусть движение переводит соответственно точки A, B, C в точки A', B', C'. Тогда выполняются равенства

$$A'B'=AB,\ A'C'=AC,\ B'C'=BC. \qquad (1)$$

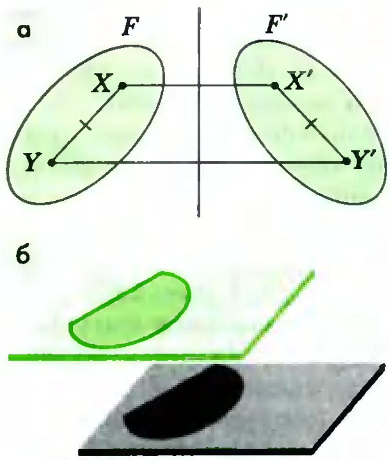


Рис. 358

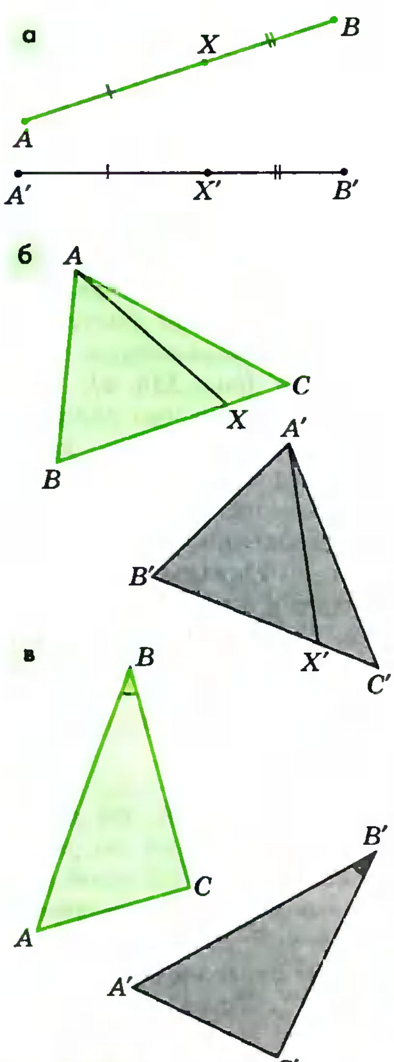


Рис. 359

Если точки A, B, C лежат на одной прямой, то одна из них, например точка B, лежит между двумя другими. В этом случае $AB+BC=AC$, и из равенств (1) следует, что $A'B'+B'C'=A'C'$. А это равенство означает, что точка B' лежит между точками A' и C'. Первое утверждение доказано.

Второе утверждение докажите самостоятельно (способом «от противного»).

Свойство 2. Отрезок движением переводится в отрезок.

• Действительно, пусть движение переводит концы A, B отрезка AB в точки A', B' (*рис. 359, а*). Когда точка X пробегает отрезок AB от A к B, ее образ X' пробегает отрезок $A'B'$ от A' к B'.

Свойство 3. Треугольник движением переводится в треугольник.

• Действительно, треугольник ABC заполняется отрезками, соединяющими вершину A с точками X противоположной стороны BC (*рис. 359, б*). Движение сопоставит отрезку BC некоторый отрезок $B'C'$ и точке A точку A', не лежащую на прямой $B'C'$. Каждому отрезку AX это движение сопоставит отрезок $A'X'$, где точка X' лежит на $B'C'$. Все эти отрезки $A'X'$ заполнят треугольник $A'B'C'$. В него и переходит треугольник ABC.

Свойство 4. Движение сохраняет величины углов.

Подробнее: если точкам A, B, C, не лежащим на одной прямой, движение сопоставляет точки A', B', C', то $\angle A'B'C'=\angle ABC$.

• **Доказательство.** В силу равенств (1) $\triangle A'B'C' = \triangle ABC$. Поэтому $\angle A'B'C'=\angle ABC$ (*рис. 359, в*).

Итак, движение сохраняет углы, а значит, и перпендикулярность. Поэтому высота треугольника движением переводится в высоту треугольника-образа. Длина высоты, как и длина основания треугольника, как полагается при движении, сохраняется.

Значит, *движение сохраняет площадь треугольника*. И не только треугольника. Многоугольные фигуры составляются из треугольников, а потому справедливо такое свойство:

Свойство 5. При движении сохраняются площади многоугольных фигур.

39.4 **Равенство фигур.** Свойства движений, доказанные в п. 39.3, показывают, что две фигуры, полученные одна из другой движением, одинаковы. Но в геометрии вместо «одинаковы» говорят «равны».

Определение. Две **фигуры равны**, если между их точками есть соответствие, сохраняющее расстояния.

Другими словами, фигура F' равна фигуре F, если фигуру F' можно получить некоторым движением фигуры F.

На практике сравнивают предметы, сравнивая в них соответствующие расстояния. Только говорят обычно не о расстояниях, а о соответствующих размерах предметов. При этом никто не сравнивает предметы так, чтобы каждой точке одного предмета сопоставлять точку другого предмета. На деле сравнивают те расстояния между точками, которые играют определяющую роль для него. У геометрических фигур сравнивают те размеры фигуры, которые ее однозначно задают. Например, в четырехугольниках сравнивают только длины сторон и диагонали.

Так мы и поступили, когда определили в § 9, какие треугольники называются равными. Для них определяющими размерами служат расстояния между вершинами — длины сторон.

1. Приведите примеры преобразований реальных фигур.
2. Приведите примеры движений реальных фигур.
3. В чем заключается преобразование фигуры?
4. В чем заключается движение фигуры?
5. Какие свойства фигур сохраняются при движениях?
6. Какие фигуры называются равными?

Задачи к § 39

39.2 **39.1.** При каких условиях проектирование отрезка AB на прямую a является движением?

39.2. Из точки A прямой a проведен отрезок $AB \perp a$. Из всех точек отрезка AB проводятся по одну сторону от него параллельные отрезки до прямой a. Будет ли это преобразование отрезка AB движением?

39.3. Дан угол со сторонами a, b. Луч c — его биссектриса. Каждой точке X луча a ставится в соответствие точка X' луча b по такому правилу:
а) $XX' \perp c$;
б) из точки X проводится перпендикуляр к лучу a до пересечения в точке Y с лучом c, а затем из Y проводится перпендикуляр YX' на b;
в) из X опускается перпендикуляр XY на c, а затем из Y опускается перпендикуляр YX' на b. Являются ли эти преобразования движениями луча a?

39.4. Из вершины прямого угла со сторонами a, b внутри его идет луч c. Из каждой точки X луча a проводится к нему перпендикуляр до пересечения в точке Y с лучом c. Затем из Y опускается на b перпендикуляр YX'. Является ли это преобразование луча a в луч b движением?

39.3 **39.5.** Объясните, почему в результате движения переходят:
а) прямая в прямую;
б) луч в луч;
в) параллелограмм в параллелограмм;
г) ромб в ромб.
Придумайте сами аналогичные задачи.

§ 40 Виды движений

Если на плоскости фигура F' равна фигуре F, то существует некоторое движение, которое переводит F в F' (согласно определению равенства фигур). Оказывается, что на плоскости существуют всего лишь четыре вида движений: 1) параллельный перенос (или, короче, перенос, *рис. 360, а*); 2) отражение в прямой (осевая симметрия, *рис. 360, б*); 3) поворот вокруг точки (*рис. 360, в*); 4) «скользящее отражение», состоящее из последовательно выполненных отражения в прямой и переноса вдоль нее (*рис. 360, г*). Одним из этих движений и переводится F в F'.

40.1 **Перенос.** Реальным примером фигур, полученных друг из друга параллельным переносом, являются одинаковые окна на фасаде дома (*см. рис. 356*). Начертив на плане одно из окон, можно затем получить любое другое окно, сместив все точки первого в одном и том же направлении на одно и то же расстояние. Это свойство и определяет параллельный перенос.

Определение. **Параллельным переносом** фигуры называется такое ее преобразование, при котором все точки фигуры перемещаются в одном и том же направлении на одно и то же расстояние.

Подробнее: если при параллельном переносе точкам X и Y сопоставлены точки X' и Y', то направленные отрезки $\overrightarrow{XX'}$ и $\overrightarrow{YY'}$ равны и одинаково направлены, так что $\overrightarrow{XX'}=\overrightarrow{YY'}$ (*рис. 361, а*).

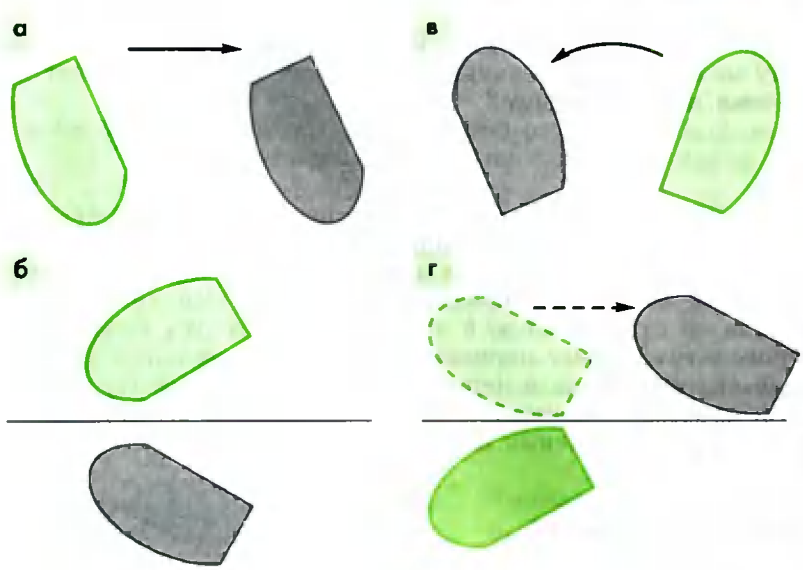


Рис. 360

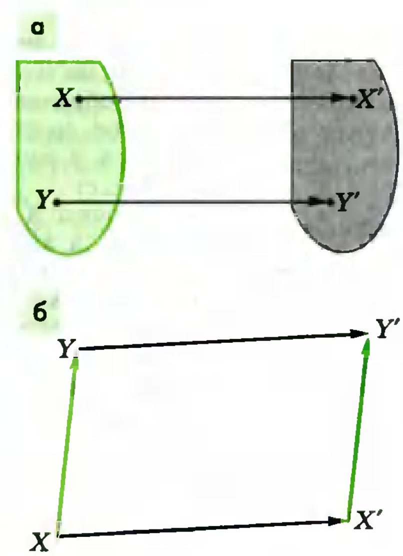


Рис. 361

Равные направленные отрезки представляют один и тот же вектор. Поэтому можно сказать так: параллельный перенос — это преобразование, при котором все точки фигуры перемещаются на один и тот же вектор — **вектор переноса.**

Параллельный перенос является движением.

Действительно, пусть при параллельном переносе точки X и Y перешли в точки X' и Y'. Тогда, как следует из определения переноса, выполняется равенство $\overrightarrow{XX'}=\overrightarrow{YY'}$.

Согласно признаку равенства векторов (теорема 24, п. 27.4) из равенства $\overrightarrow{XX'}=\overrightarrow{YY'}$ следует равенство $\overrightarrow{XY}=\overrightarrow{X'Y'}$ *(рис. 361, б)*. Поэтому $X'Y'=XY$, откуда следует, что параллельный перенос — движение.

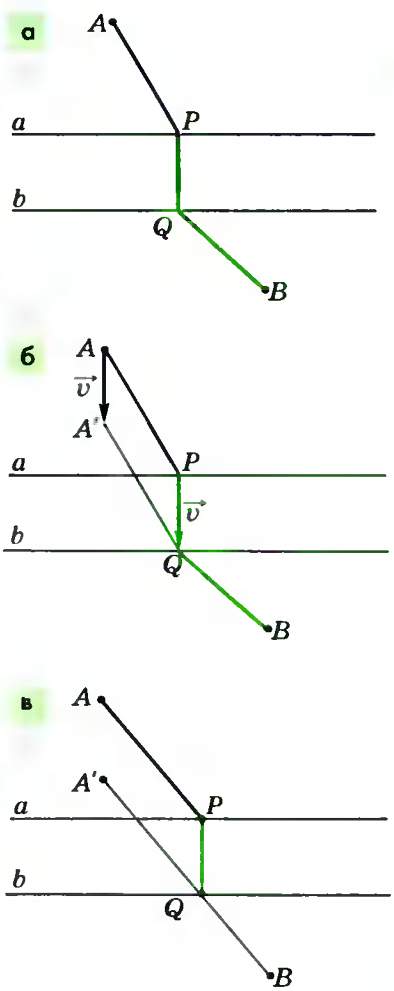


Рис. 362

40.2 **Метод параллельного переноса.** Преобразования упрощают решения многих геометрических задач. Основная идея метода геометрических преобразований в том, что фигура, рассматриваемая в условии задачи, преобразуется в такую, для которой решение становится простым. Решив задачу для преобразованной фигуры, затем обратным преобразованием возвращаются к исходной фигуре.

Применение каждого преобразования имеет свои особенности. Метод параллельного переноса позволяет сблизить удаленные друг от друга части фигуры и тем упростить задачу. Вот пример такой

задачи. **Где следует построить мост через реку, разделяющую пункты A и B, чтобы путь $l=AP+PQ+QB$ был кратчайшим (рис. 362, а)?**

Берега реки считаются параллельными прямыми a и b, а мост, естественно, строится перпендикулярно берегам реки.

Решение. Заметим, что длина отрезка PQ не зависит от положения точки P на прямой a, а вектор $\vec{v}=\overrightarrow{PQ}$ определяется лишь прямыми a и b *(рис. 362, б)*. Поэтому надо найти такое положение точки P, чтобы сумма $AP+QB$ была наименьшей. Пока отрезки AP и QB удалены друг от друга. Поэтому переведем отрезок AP в положение $A'Q$ параллельным переносом на вектор $\vec{v}$. Получим ломаную $A'QB$. И теперь становится ясно, что длина ломаной $A'QB$, а значит, и длина l будут наименьшими в том случае, когда точки A', Q, B лежат на одной прямой. Итак, Q — точка пересечения отрезка $A'B$ с прямой b, а P — проекция Q на a *(рис. 362, в)*.

40.3 **Отражение в прямой (осевая симметрия).** О фигурах, имеющих ось симметрии, мы говорили еще в п. 12.2. Такие фигуры изображены на *рисунках 78, 356*. Сейчас мы дадим точные определения осевой симметрии и связанных с нею понятий.

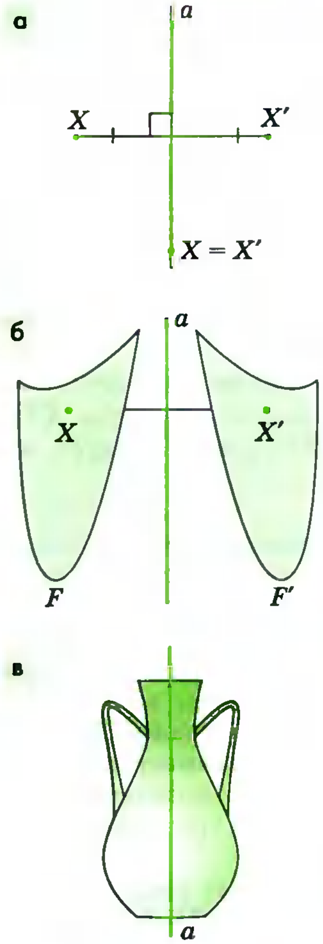


Рис. 363

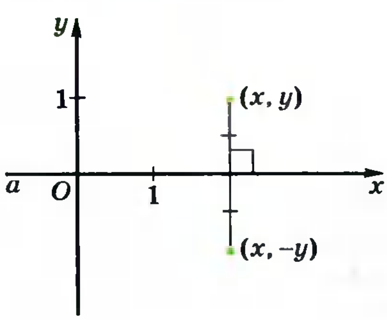


Рис. 364

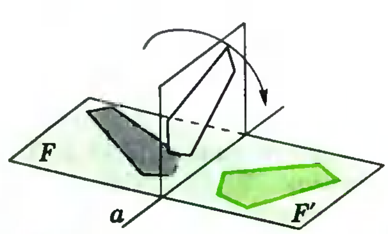


Рис. 365

Точки X и X' называются симметричными относительно прямой a, если a является серединным перпендикуляром отрезка XX' *(рис. 363, а)*. Каждая точка прямой a считается симметричной сама себе (относительно a). Если дана прямая a, то каждой точке X соответствует единственная точка X', симметричная X относительно a.

Отражением фигуры в прямой a (или осевой симметрией с осью a) называется такое преобразование этой фигуры, при котором каждой точке данной фигуры сопоставляется точка, симметричная ей относительно прямой a *(рис. 363, б)*.

Фигура F', полученная отражением фигуры F в прямой a, называется **симметричной фигуре F относительно прямой a.**

Поскольку симметричность точек относительно прямой взаимна, то и фигура F симметрична фигуре F' относительно прямой a, т. е. F и F' взаимно *симметричны относительно прямой a*.

В частности, фигура F может быть симметрична сама себе относительно некоторой прямой a *(рис. 363, в)*. Тогда говорят, что **фигура F симметрична относительно прямой a** и что прямая a является ее **осью симметрии.**

Отражение в прямой является движением.

● Чтобы доказать это, применим метод координат. Примем прямую a за ось x прямоугольных координат. Тогда отражение в ней сопоставит точке (x, y) точку $(x, -y)$ *(рис. 364)*.

Возьмем любые две точки A (x_1, y_1) и B (x_2, y_2) и построим симметричные им относительно оси x точки A' $(x_1, -y_1)$ и B' $(x_2, -y_2)$. Вычисляя расстояния $A'B'$ и AB, получим

$$A'B' = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (-y_2 + y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = AB.$$

Итак, отражение сохраняет расстояния, т. е. является движением.

Отражение в прямой можно наглядно представить как поворот вокруг этой прямой в пространстве. Именно, представим себе часть плоскости с данной фигурой F в виде пластинки, надетой на прямую a как на ось. Повернем пластинку вокруг оси a на 180° так, что она окажется в прежней плоскости *(рис. 365)*. Точки, лежавшие по одну сторону от прямой a, перейдут на другую сторону на том же расстоянии от a. Значит, произойдет отражение в прямой a.

Чтобы получить рисунок фигуры, отраженной в прямой, можно перевернуть лист бумаги. Если бумага прозрачна, то рисунок будет виден как отраженный.

40.4 ◆ **Метод симметрии.** Рассмотрим еще одну задачу о кратчайшем расстоянии. Сформулируем ее так.

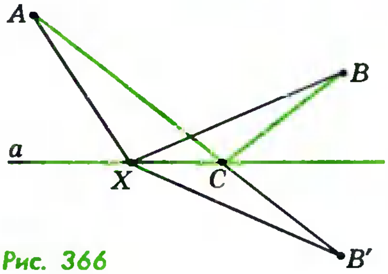


Рис. 366

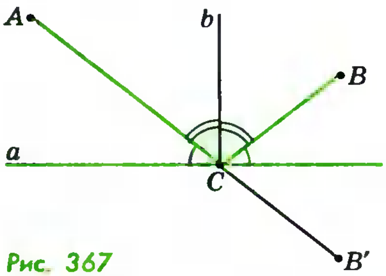


Рис. 367

Задача. Две деревни A и B находятся по одну сторону от прямого шоссе a. В какой точке C на шоссе a устроить остановку автобуса, чтобы сумма расстояний $AC+CB$ была кратчайшей?

Решение. Построим точку B', симметричную точке B относительно прямой a (рис. 366). Для любой точки X прямой a $BX=B'X$. Поэтому $AX+XB=AX+XB'$. Ясно, что сумма $AX+XB'$ становится кратчайшей, когда X попадает в точку пересечения отрезка AB' с прямой a. Это точка C и дает решение задачи.

Решенная геометрическая задача связана с некоторыми физическими явлениями. Пусть световой луч AC отражается от прямой a в луч CB (рис. 367). В физике рассматривают углы, которые отрезки AC и BC образуют с перпендикуляром b к прямой a. По закону отражения света угол падения равен углу отражения. А это значит, что свет распространяется из точки A в точку B так, что путь $AC+CB$, а значит, и время его прохождения будут наименьшими. Это так называемый принцип Ферма. Из него вытекают все законы отражения и преломления света. По тому же закону происходят «отскоки» при упругих ударах (например, мячей, биллиардных шаров и т. п.).

40.5 **Поворот.** Каждый представляет себе, как повернуть плоский предмет вокруг какой-нибудь точки (например, стрелку часов), и нам нужно только описать это наглядное представление в понятиях геометрии (рис. 368, а).

Пусть дана точка O. На окружности с центром O можно указать два направления обхода — по часовой стрелке и против нее (рис. 368, б). Этим задаются также два направления отсчета углов от идущих из точки O лучей — по часовой стрелке и против нее.

Поворот фигуры F вокруг центра O на данный угол φ в данном направлении определяется так: каждой точке X фигуры F сопоставляется такая точка X', что, во-первых, $OX'=OX$, во-вторых, $\angle X'OX=\varphi$ и, в-третьих, луч OX' откладывается от луча OX в заданном направлении (рис. 368, в).

Можно сказать, что все отрезки OX поворачиваются на один и тот же угол в одну и ту же сторону. Если точка O принадлежит фигуре F, то ей сопоставляется она сама. Точка O называется **центром поворота**, а угол φ — **углом поворота**.

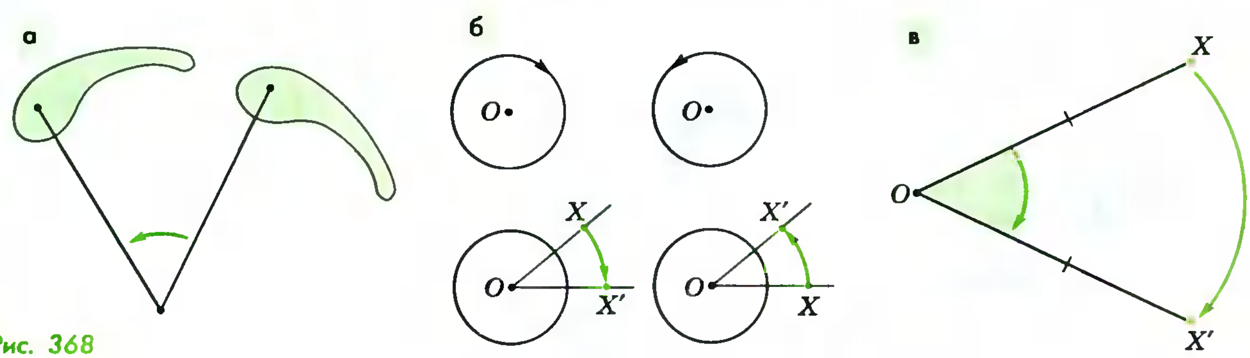


Рис. 368

Теорема 37 *(о повороте).* **Поворот является движением.**

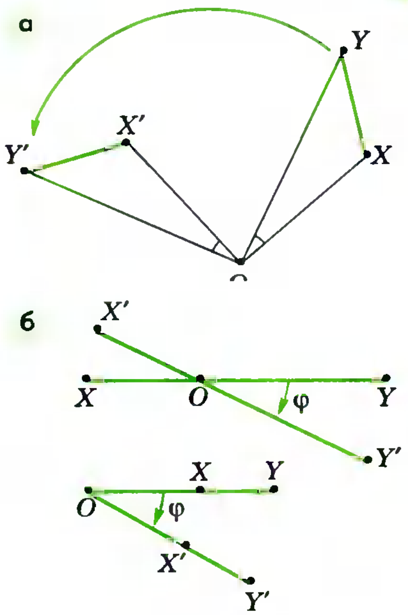


Рис. 369

• **Доказательство.** Пусть при повороте вокруг точки O точкам X и Y сопоставляются точки X' и Y'. Покажем, что $XY'=XY$.

Рассмотрим общий случай, когда точки O, X, Y не лежат на одной прямой. Тогда $\angle X'OY'=\angle XOY$ (рис. 369, а). Действительно, пусть угол XOY от OX к OY отсчитывается в направлении поворота. (Если это не так, то рассматриваем угол YOX.) Тогда угол между OX и OY' равен сумме угла XOY и угла поворота (от OY к OY'):

$$\angle XOY'=\angle XOY+\angle YOY'. \tag{1}$$

С другой стороны,

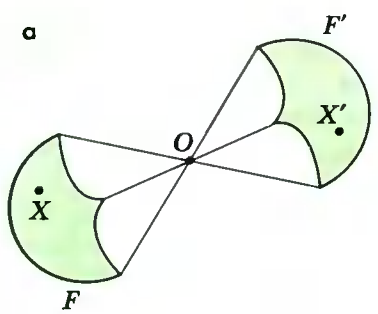
$$\angle XOY'=\angle XOX'+\angle X'OY'. \tag{2}$$

Так как $\angle XOX'=\angle YOY'$ (как углы поворота), то из этого равенства и равенств (1) и (2) следует, что $\angle X'OY'=\angle XOY$.

Кроме того, $OX'=OX$ и $OY'=OY$. Поэтому $\triangle X'OY'=\triangle XOY$. Следовательно, $X'Y'=XY$.

Если точки X, O, Y лежат на одной прямой, то отрезки XY и $X'Y'$ будут либо суммой, либо разностью равных отрезков OX, OY и OX', OY' (рис. 369, б). Поэтому и в этом случае $X'Y'=XY$. Итак, поворот является движением.

Особый случай представляет поворот на 180°. Если O — центр такого поворота, то, чтобы построить точку X', соответствующую точке X, достаточно продолжить отрезок XO за точку O на отрезок $OX'=OX$ (рис. 370, а). Точки X и X' в этом случае называются **симметричными относительно точки** O, а само преобразование — **центральной симметрией с центром в точке** O.



Так как симметричность точек X и X' относительно некоторой точки O взаимна, то и симметричность фигур относительно точки взаимна. А именно если фигура F перешла при симметрии с центром O в фигуру F', то и F' при этой симметрии перешла в F. В частности, фигура F может быть симметрична сама себе относительно точки O (рис. 370, б). Тогда говорят, что фигура F **симметрична относительно точки** O и что точка O является **центром сим-**

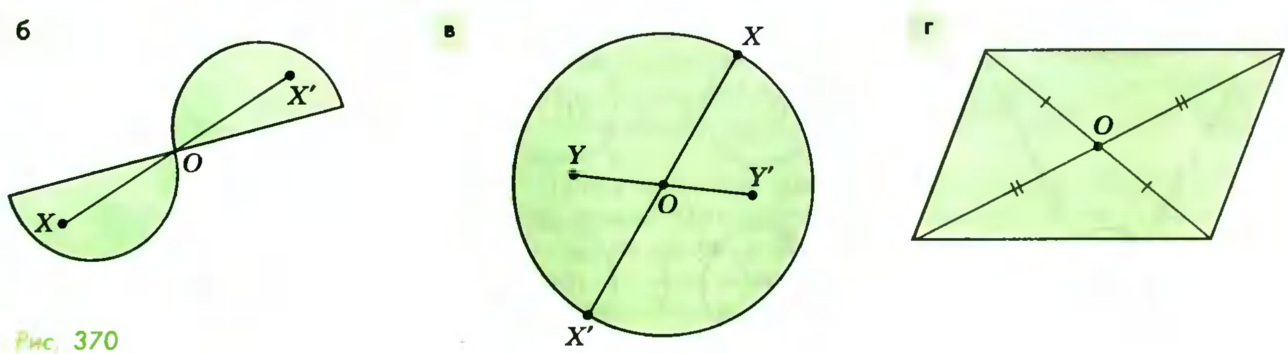


Рис. 370

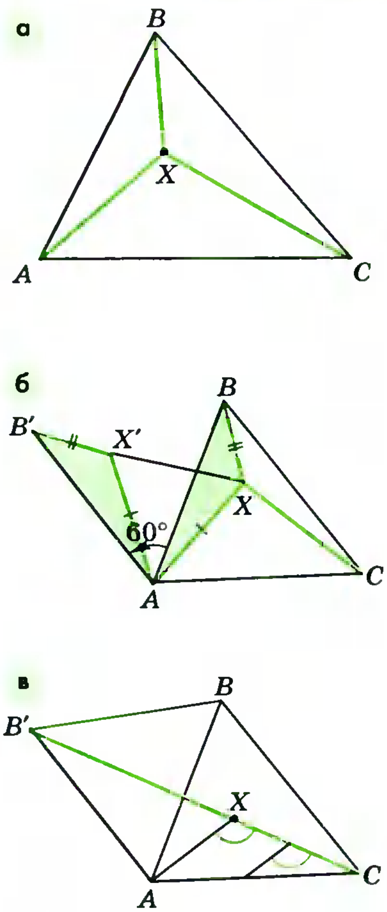


Рис. 371

метрии фигуры F. Например, центр круга — это его центр симметрии (рис. 370, в), точка пересечения диагоналей параллелограмма — его центр симметрии (рис. 370, г).

Замечание. Конечно, центральную симметрию можно определить и не используя понятия поворота.

40.6 **Метод поворота.** Этим методом мы тоже решим задачу о наименьшем значении. Даем ей лишь геометрическую формулировку. Придумайте реальные ситуации, в которых могла бы встретиться такая задача.

Задача. **В данном треугольнике ABC найти такую точку, что сумма ее расстояний до вершин треугольника наименьшая.**

Решение. Возьмем в треугольнике ABC любую точку X и рассмотрим сумму $l=XA+XB+XC$ (рис. 371, а). Чтобы искать наименьшее значение этой суммы, надо построить ломаную из отрезков XA, XB, XC. Для этого повернем треугольник ABX вокруг точки A в сторону от треугольника ABC на $60°$. Получим $\triangle AB'X'=\triangle ABX$. Рассмотрим ломаную $B'X'XC$. В ней $B'X'=BX$ и $X'X=XA$ (так как $\triangle AXX'$ равносторонний). Следовательно, $B'X'+X'X+XC=l$. И становится ясно, что l достигает наименьшего значения тогда, когда точки X' и X лежат на отрезке $B'C$ (заметим, что положение точки B' определено — она вершина равностороннего треугольника ABB', рис. 371, б). В этом случае углы $AX'B'$ и AXC — внешние углы равностороннего треугольника AXX'. Поэтому $\angle AXC=\angle AX'B'=120°$. Так как $\angle AXB=\angle AX'B'$, то $\angle AXB=120°$. А тогда и $\angle BXC=120°$.

Итак, l достигает наименьшего значения для такой точки X, из которой все стороны треугольника видны под равными углами. Эту точку X легко построить на отрезке $B'C$ (применив, например, параллельный перенос, рис. 371, в).

Замечание. Это решение пригодно лишь для треугольника, в котором все углы меньше $120°$. Подумайте, где находится искомая точка, если это условие не выполняется. Добавим, что ее иногда называют точкой Торричелли.

40.7 **О равенстве треугольников.** Покажем, что определение равенства треугольников (п. 9.5) согласуется с общим определением равенства фигур (п. 39.4). Для этого докажем, что *если у треугольников ABC и $A'B'C'$ стороны соответственно равны ($AB=A'B'$, $BC=B'C'$, $AC=A'C'$), то треугольник ABC движением можно перевести в треугольник $A'B'C'$* (рис. 372).

Сначала параллельным переносом на $\overrightarrow{AA'}$ переведем $\triangle ABC$ в $\triangle A'B'C'$. Если $B_1=B'$ и $C_1=C'$, то утверждение доказано. Пусть $\triangle A'B_1C_1$ и $\triangle A'B'C'$ не совпадают, например, пусть $B_1\neq B'$. Тогда повернем $\triangle A'B_1C_1$ вокруг точки A' на угол $B'A'B_1$. В результате после поворота мы получим либо $\triangle A'B'C'$, либо $\triangle A'B'C_2$, симметричный $\triangle A'B'C'$ относительно прямой $A'B'$. Во втором случае к $\triangle A'B'C_2$

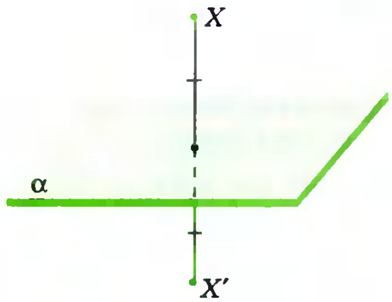


Рис. 373

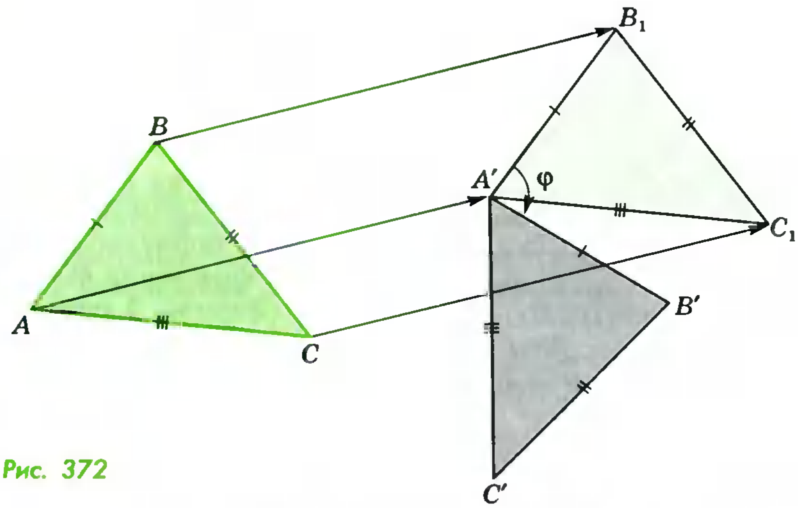


Рис. 372

применим симметрию относительно прямой $A'B'$ и тем переведем его в $\triangle\ A'B'C'$. Поскольку, последовательно выполняя движения, мы сохраняем расстояния, то в результате имеем движение, которое переводит $\triangle ABC$ в $\triangle A'B'C'$.

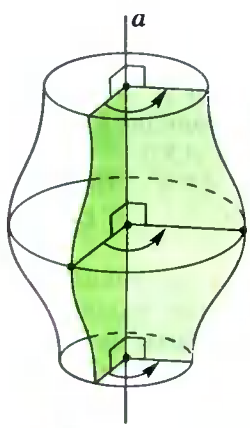


Рис. 374

40.8 **Движения в пространстве.** Расскажем о движениях в пространстве. Данное в п. 39.2 определение движения относится как к фигурам на плоскости, так и к фигурам в пространстве. И все свойства движений, доказанные в п. 39.3, а также их доказательства остаются справедливыми и для движений в пространстве. Свойство 4 о том, что движение сохраняет величины углов, надо понимать более широко: сохраняются углы между прямыми и плоскостями, между векторами. В частности, при движении сохраняются все отношения перпендикулярности и параллельности прямых и плоскостей.

Отметим, что при движении в пространстве плоскость переходит в плоскость, тетраэдр — в тетраэдр.

Все сказанное в п. 40.1 о переносе остается справедливым и для переносов в пространстве.

Пространственным аналогом отражения в прямой (осевой симметрии) является отражение в плоскости (зеркальная симметрия). Определяется оно так.

Симметрией относительно плоскости α (отражением в плоскости α, зеркальной симметрией относительно плоскости α) называется преобразование фигуры, которое каждой ее точке X сопоставляет точку X', симметричную ей относительно плоскости α. Если точка X лежит в плоскости α, то $X'=X$; если же X не лежит в плоскости α, то отрезок XX' перпендикулярен плоскости α и пересекает ее в своей середине *(рис. 373)*.

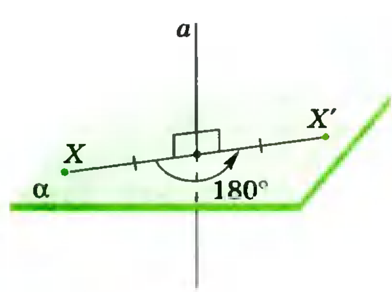


Рис. 375

Важной характеристикой движения является множество его неподвижных точек. **Неподвижной точкой преобразования** называется такая точка, образом которой при преобразовании является она сама. Например, центр поворота является неподвижной точкой поворота, а для осевой сим-

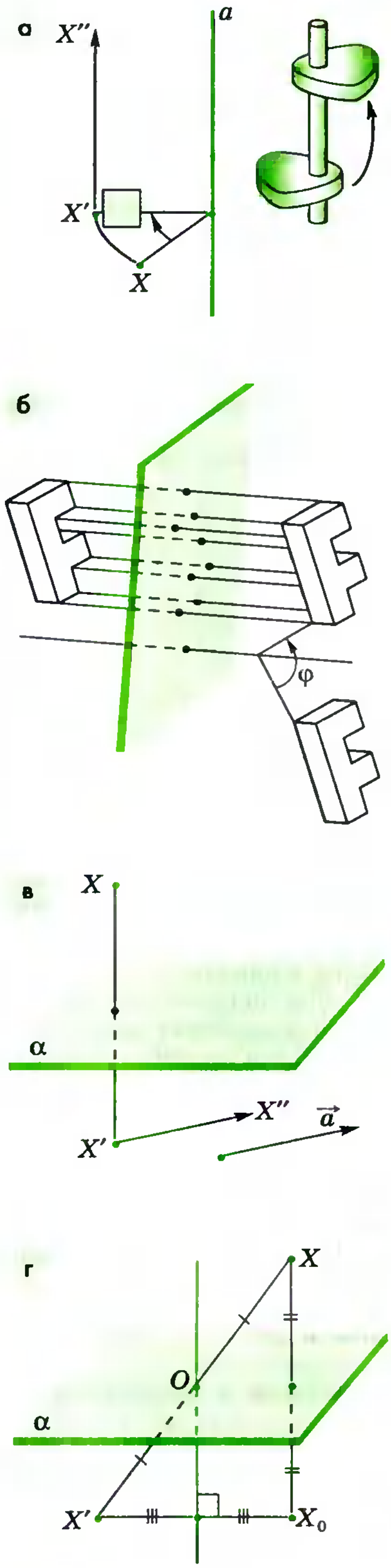


Рис. 376

метрии множеством ее неподвижных точек является ось симметрии. Преобразование может не иметь неподвижных точек: например, перенос на ненулевой вектор. Преобразование, все точки которого неподвижны, называется **тождественным преобразованием.**

У любого движения пространства либо нет неподвижных точек (например, у переноса), либо неподвижная точка единственная (например, у центральной симметрии), либо множество неподвижных точек является прямой, либо множество неподвижных точек является плоскостью (например, у зеркальной симметрии), либо множество неподвижных точек состоит из всех точек пространства (тождественное преобразование).

Движение пространства, множеством неподвижных точек которого является прямая a, называется **поворотом вокруг прямой (вокруг оси) a.**

При повороте вокруг прямой a в плоскостях, перпендикулярных прямой a, происходит поворот на один и тот же угол φ в одном и том же направлении вокруг точек, в которых эти плоскости пересекают прямую a *(рис. 374)*. Этот угол φ называют углом поворота.

Поворотом вокруг прямой a на 180° является **осевая симметрия в пространстве относительно прямой a** *(рис. 375)*. Это утверждение является аналогом утверждения о том, что на плоскости поворотом на 180° является центральная симметрия.

Отметим, что центральная симметрия в пространстве поворотом вокруг прямой не является: у центральной симметрии лишь одна неподвижная точка — центр симметрии, а у поворота неподвижные точки заполняют целую прямую — ось поворота.

Любое движение пространства является одним из трех следующих движений, которые получены последовательным выполнением таких движений:

1) поворота и переноса в направлении оси поворота (такое движение называется винтовым (короче, винтом), *рис. 376, а*);

2) поворота и симметрии относительно плоскости, перпендикулярной оси поворота (такое движение называется зеркальным поворотом, *рис. 376, б*);

3) симметрии относительно плоскости и переноса в некотором направлении, параллельном этой плоскости (такое движение называется скользящей симметрией, *рис. 376, в*).

Отметим, что частными случаями винтового движения являются и перенос (при нулевом угле поворота), и поворот (при нулевом векторе переноса).

Частными случаями зеркального поворота являются зеркальная симметрия (при нулевом угле поворота) и центральная симметрия (при повороте на 180°, *рис. 376, г*). Зеркальная симметрия является также частным случаем скользящей симметрии (при нулевом векторе переноса).

1. Как определяется параллельный перенос? Чем он задается?
2. Как определяется осевая симметрия? Чем она задается?
3. Как определяется зеркальная симметрия? Чем она задается?
4. Как определяется поворот на плоскости? Чем он задается?
5. Как определяется поворот в пространстве? Чем он задается?
6. Как можно определить центральную симметрию на плоскости и в пространстве? В чем их сходство и в чем отличие?
7. Что значит: фигура имеет плоскость симметрии, ось симметрии, центр симметрии?

Задачи к § 40

40.1. Докажите, что в результате переноса прямая переходит в прямую, ей параллельную, или в себя.
40.1

40.2. Нарисуйте отрезок AB. Нарисуйте его образ в результате переноса на вектор: а) $\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{BA}$; в) $\overrightarrow{AC}$ при условии, что точка C не лежит на прямой AB. Какую фигуру «заметает» при этом переносе отрезок AB? Чему равна площадь этой фигуры, если $AB=AC=1$, $\angle CAB=\varphi$?

40.3. Равносторонний треугольник ABC подвергается переносу на вектор: а) $\overrightarrow{AC}$; б) $\overrightarrow{BK}$, где точка K — середина AC; в) $\overrightarrow{CO}$, где точка O — центр треугольника. Какая из его сторон при этом переносе «заметает» бо́льшую площадь? Какое наблюдение можно сделать, сравнивая эти площади?

40.4. Нарисуйте любой треугольник. Нарисуйте его образ при переносе на какой-либо вектор. В результате переноса каждая его сторона «заметает» некоторую площадь. Докажите, что бо́льшая из этих площадей равна сумме меньших. Используйте этот результат для доказательства теоремы Пифагора.

40.2 **40.5.** а) Нарисуйте оси координат, точки A (2, 2), B (4, −4) и полосу между осью x и прямой $y=1$. Постройте точки K и L на краях полосы, такие, чтобы KL было параллельно оси y и ломаная $AKLB$ была кратчайшей. Как найти координаты точек K и L?
б) Решите задачу а) для полосы между осью x и прямой $y=-1$.

40.6. а) В равнобокой трапеции угол при основании равен 60°. Докажите, что боковая сторона равна разности оснований. Проверьте обратное.
б) Пусть боковые стороны равнобокой трапеции лежат на перпендикулярных прямых. Высота трапеции равна меньшему основанию и равна 1. Чему равна площадь трапеции?

40.7. Постройте трапецию по: а) четырем сторонам; б) основаниям и диагоналям.

40.8. Докажите, что:
40.3 а) если прямая параллельна оси симметрии, то симметричная ей прямая также параллельна этой оси;
б) если прямая пересекает ось симметрии, то симметричная ей прямая пересекает эту ось в той же точке, что и исходная прямая;
в) если прямая перпендикулярна оси симметрии, то она в результате этой симметрии совмещается сама с собой.

40.9. Нарисуйте отрезок. Постройте отрезок, симметричный ему относительно прямой:
а) содержащей его;
б) проходящей через его конец;
в) проходящей через точку внутри его;
г) параллельной ему;
д) проходящей мимо него и не параллельной ему.

40.10. Нарисуйте равносторонний треугольник. Отразите его от:
а) прямой, содержащей среднюю линию;
б) прямой, перпендикулярной стороне и проходящей через середину другой стороны. Нарисуйте объединение исходного и полученного треугольников. Вычислите его периметр и площадь, если сторона треугольника равна 2.

40.11. В круге с центром O радиусом 6 проведена хорда AB на расстоянии 3 от центра. Отразите круг от прямой AB. Нарисуйте объединение и пересечение исходного и полученного кругов. Вычислите их периметр и площадь.

40.4 **40.12.** а) На координатной плоскости даны точки A (2, 1) и B (3, 3). Постройте точку K на оси x, такую, что ломаная AKB кратчайшая. Как вычислить координаты K и длину этой ломаной?
б) Решите задачу а) для точки L на оси y.

40.13. Из точки A (0, 2) на ось x направлен луч света.
а) Пусть он отражается от нее в точке (2, 0). Пройдет ли отраженный луч через точку (3, 1)? через точку (5, 3)?
б) В какую точку оси x его надо направить, чтобы отраженный луч прошел через точку (2, 2)? через точку (−3, 3)?
в) Решите задачи а) и б), если A (1, 2).

40.14. Докажите, что в результате центральной симметрии прямая переходит в параллельную ей прямую или в себя.
40.5

40.15. Нарисуйте квадрат. Отметьте точку, которая лежит посередине между центром квадрата и его вершиной. Примите ее за центр симметрии. Постройте квадрат, симметричный данному относительно этой точки. Нарисуйте объединение и пересечение исходного и полученного квадратов. Вычислите их площадь и периметр, если сторона исходного квадрата равна 2.

40.16. В круге с центром O радиусом 4 взята точка A, удаленная от центра на 2. Нарисуйте образ этого круга в результате центральной симметрии относительно A. Нарисуйте объединение и пересечение исходного и полученного кругов. Вычислите их площадь и периметр.

40.17. Нарисуйте отрезок AB. Нарисуйте его образ в результате поворота:
а) вокруг A на 120° по часовой стрелке;
б) вокруг B на 60° против часовой стрелки;
в) вокруг середины отрезка на 45° по часовой стрелке.

40.18. Нарисуйте отрезок. Отметьте центр поворота вне его. Нарисуйте его образ в результате поворота по часовой стрелке на угол: а) 30°; б) 90°; в) 135°. В каждом случае вычислите угол между старым и новым положением прямой, на которой лежит этот отрезок. Обобщите полученные результаты.

40.19. Нарисуйте образ равностороннего треугольника ABC в результате поворота против часовой стрелки: а) вокруг A на 120°; б) вокруг B на 60°; в) вокруг C на 30°; г) вокруг середины AC на 90°. В случаях в) и г) найдите площадь объединения исходного и полученного треугольников, если площадь исходного треугольника равна S.

40.6 **40.20.** а) Постройте треугольник по двум сторонам и медиане к третьей стороне.
б) Докажите, что медиана треугольника меньше полусуммы сторон, имеющих с ней общую величину.

40.21. а) Нарисуйте угол и отметьте внутри его точку A. Постройте такую хорду угла, которая точкой A делится пополам.
б) Докажите, что построенная хорда отсекает от угла треугольник наименьшей площади.

40.22. Постройте точку Торричелли для: а) равностороннего треугольника; б) равнобедренного прямоугольного треугольника; в) равнобедренного треугольника с тупым углом при вершине.

40.8 **40.23.** Даны два шара равных радиусов. Какими движениями можно один из этих шаров перевести в другой?

40.24. Четырехугольную пирамиду, все ребра которой равны a, повернули вокруг высоты на 45°. Какая фигура получилась в пересечении исходной и повернутой пирамид? Сделайте рисунок.

40.25. Нарисуйте куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и правильный тетраэдр AB_1CD_1. Отметьте точки O и O_1 — центры граней $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$ соответственно.

а) Нарисуйте и назовите тетраэдр, в который перейдет при повороте вокруг прямой OO_1 на 90° тетраэдр AB_1CD_1.

б) Нарисуйте фигуру, которая получится при пересечении двух рассмотренных тетраэдров.

в) Во что перейдет тетраэдр AB_1CD_1 при двукратном повороте на 90° вокруг оси OO_1?

40.26. Нарисуйте правильную треугольную призму $ABCA_1B_1C_1$. Пусть ее боковыми гранями являются квадраты, точка O — центр квадрата ABB_1A_1, а точка P — середина ребра CC_1. Призму $ABCA_1B_1C_1$ повернули вокруг прямой OP на 90°. Нарисуйте и назовите фигуру, которая получится в пересечении исходной и повернутой призм.

40.27. Правильный тетраэдр с ребром a повернули вокруг одной из его высот на 60°. Нарисуйте фигуру, полученную в пересечении исходного и повернутого тетраэдров, назовите ее.

§ 41 Симметрия фигур

41.1 Виды симметрии. На *рисунке 377, а* изображены симметричные фигуры. Каждая их них симметрична относительно некоторой прямой, которая является их осью симметрии. А на *рисунке 377, б* изображены тоже симметричные фигуры, но другого типа. Они симметричны относительно некоторой точки, которая является их центром симметрии.

Говорят, что **фигура обладает симметрией,** если существует движение (не тождественное), переводящее ее в себя. (Тождественным называют преобразование, которое все точки оставляет на месте.)

Например, фигура обладает **поворотной симметрией,** если она переводится в себя некоторым поворотом *(рис. 378, а)*.

Одна из самых симметричных фигур конечных размеров — это круг. Каждая прямая, проходящая через его центр, является его осью симметрии, а центр круга является центром поворотной симметрии, причем поворот может быть совершен на любой угол *(рис. 378, б)*.

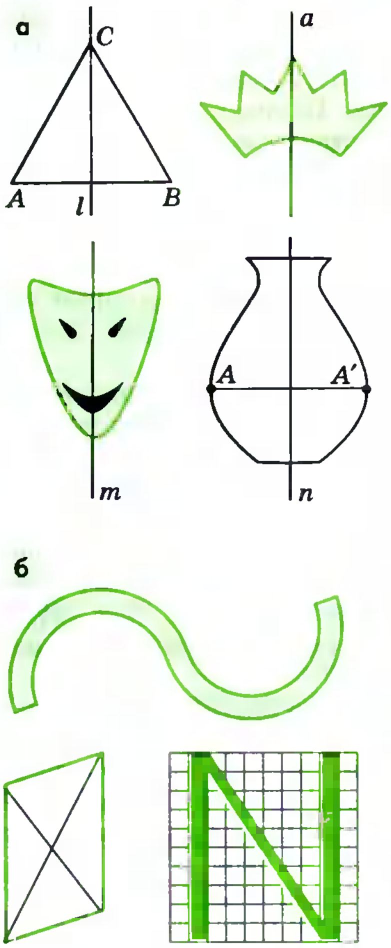


Рис. 377

Рассмотрим симметрию простейших фигур.

1) Отрезок имеет две оси симметрии и центр симметрии (укажите их).

2) Треугольник общего вида не имеет никакой симметрии. У равнобедренного (но не равностороннего) треугольника одна ось симметрии — серединный перпендикуляр его основания.

3) У равностороннего треугольника три оси симметрии, и он имеет поворотную симметрию с углом поворота $120°$ (*рис. 379, а*).

4) У каждого правильного n-угольника есть n осей симметрии, все они проходят через его центр. Он имеет также поворотную симметрию с углом поворота $\frac{360°}{n}$.

При четном n одни оси симметрии проходят через противоположные вершины, другие — через середины противоположных сторон (и тех и других осей по $\frac{n}{2}$, *рис. 379, б*). При нечетном n каждая ось проходит через вершину и середину противоположной стороны (*рис. 379, в*).

41.2 Симметрия неограниченных фигур. Фигура называется **ограниченной**, если она вся содержится в круге некоторого радиуса с центром в какой-либо своей точке. Если же фигура не лежит ни в каком круге, то она называется **неограниченной.** Примеры неограниченных фигур: прямая, угол, полоса и т. д.

До сих пор мы рассматривали симметрию ограниченных фигур. При этом переносы не рассматривались. Оказывается, если фигура переходит в себя в результате какого-либо переноса (на ненулевой вектор), то она неограниченна. (Докажите это.)

О фигуре, которая совмещается с собой при некотором переносе, говорят, что она обладает **переносной симметрией.** Например, прямая имеет такую симметрию, так как допускает перенос вдоль себя.

Интересны неограниченные фигуры, состоящие из правильно повторяющихся конечных фигур, такие, как квадратная сетка, сетка из прямоугольников, или треугольников, или шестиугольников и других фигур (*рис. 380*).

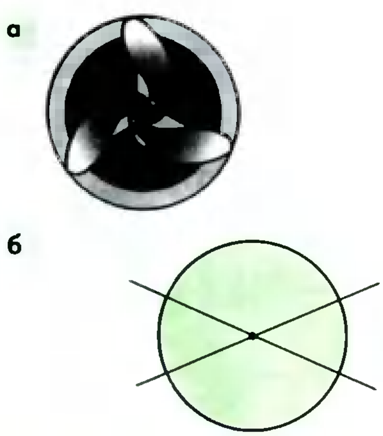


Рис. 378

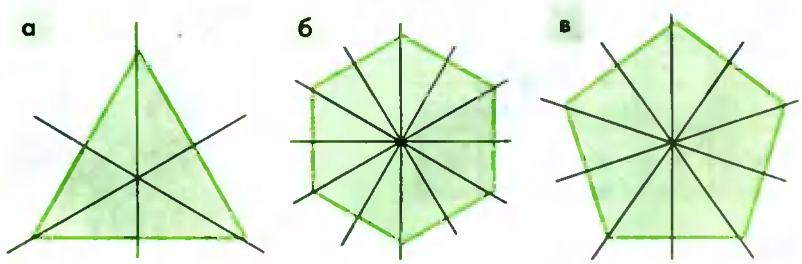


Рис. 379

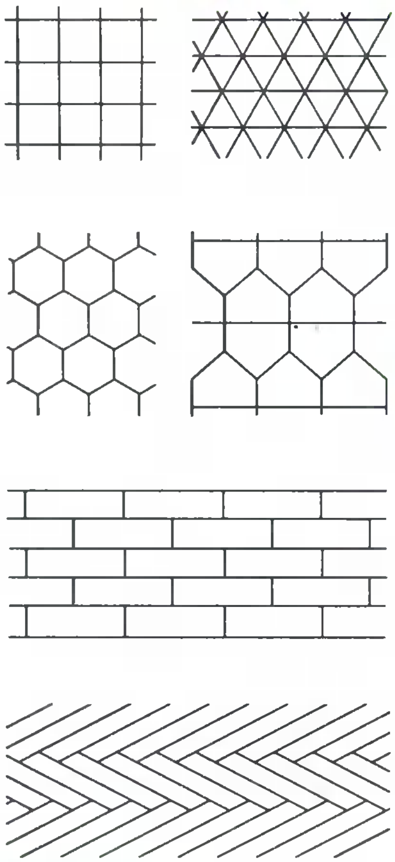


Рис. 380

Реально строить неограниченные фигуры невозможно, но можно мысленно продолжить ограниченную фигуру, «перенося» ее части, как, например, мы легко продолжаем мысленно квадратную сетку. Поэтому мы говорим о симметричности «по переносу» стены, выложенной кафелем, паркета и т. п. Так же понимаем симметричность «по переносу» разнообразных орнаментов *(рис. 381)*.

Во всех этих примерах фигуры, кроме переносов, допускают еще и другие движения, совмещающие их с собой. Интересно найти самим все движения, которые самосовмещают какой-либо орнамент.

41.3 **О симметрии.** Слово «симметрия» происходит от греческого и означает «соразмерность». В таком общем смысле симметрия играет огромную роль в искусстве, особенно ясную в орнаментах и архитектуре. Но ее можно заметить и в музыке, и в поэзии.

Симметрия широко встречается в природе, в особенности у кристаллов, у растений и животных, например симметрия бабочки, листа или морской звезды *(рис. 382)*. Поразительные по красоте примеры симметрии дают снежинки.

Симметрия может встретиться и в других разделах математики, например при построении графиков функций. График четной функции симметричен относительно оси y, а график нечетной функции симметричен относительно начала координат. График периодической функции имеет переносную симметрию вдоль оси x.

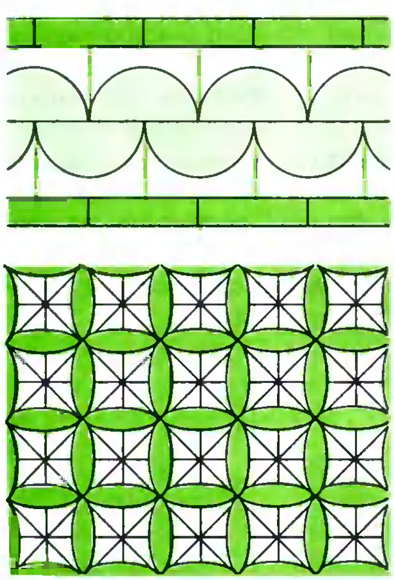


Рис. 381

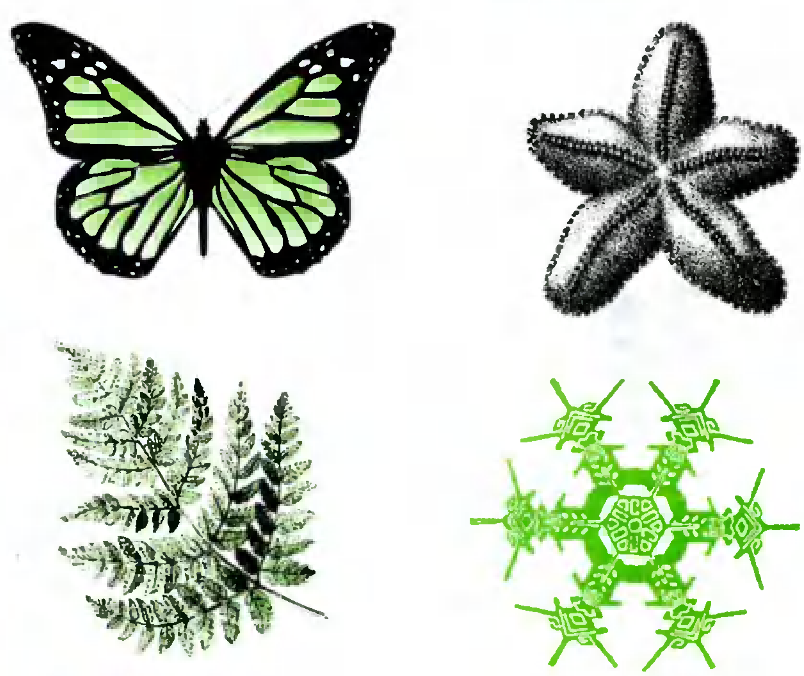


Рис. 382

1. Что означает фраза: «Фигура F симметрична»?
2. Какую симметрию имеют: а) параллелограмм; б) прямоугольник; в) ромб; г) равнобокая трапеция; д) угол; е) полоса; ж) сектор; з) сегмент; и) круг с выколотой точкой?

Задачи к § 41

Задачи этого параграфа решите, используя движения.

41.1. Докажите, что прямая, отсекающая на сторонах угла равные отрезки, перпендикулярна его биссектрисе. Докажите обратное.

41.2. Дан равнобедренный треугольник ABC, $AB = AC$. Точки K и L на сторонах AB и AC равноудалены от A.

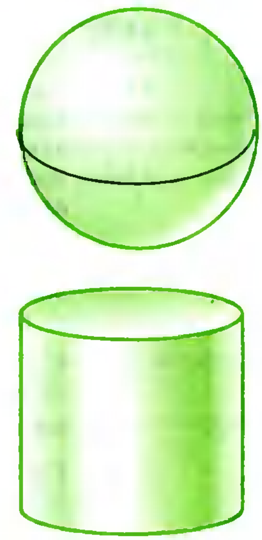
а) Докажите, что точки K и L равноудалены от C и B.

б) Докажите, что точка пересечения KC и LB лежит на оси симметрии треугольника.

в) Верно ли утверждение, обратное утверждению а)?

41.3. Докажите, что в равнобокой трапеции: а) углы при основании равны; б) диагонали равны; в) точка пересечения диагоналей лежит на оси симметрии.

41.4. Докажите, что всякая хорда параллелограмма, проходящая через его центр симметрии: а) делится центром пополам; б) делит параллелограмм на равновеликие части.

а
б


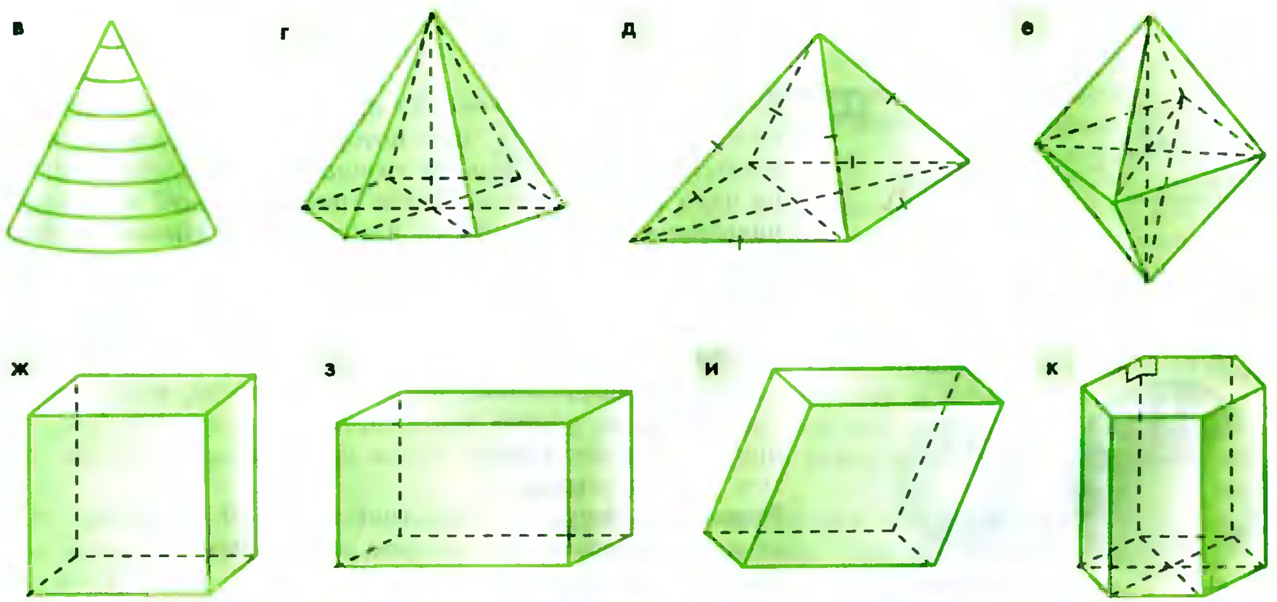
в г д е
ж з и к


Рис. 383

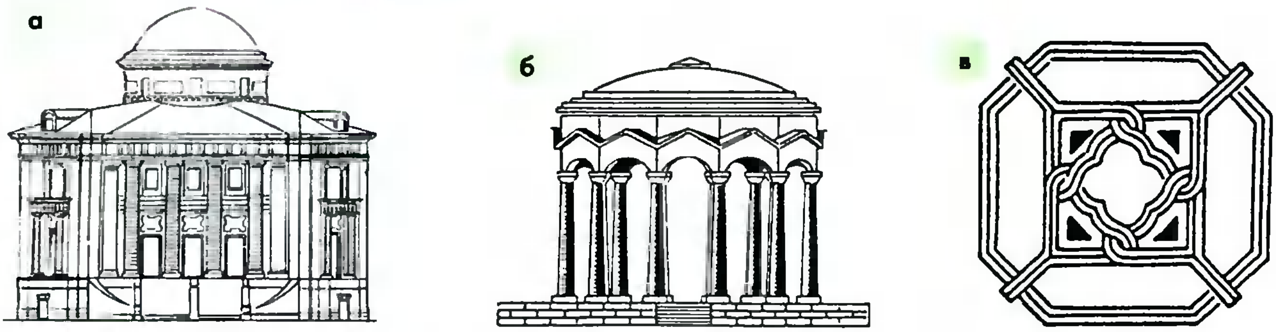


Рис. 384

41.5. Докажите, что две взаимно перпендикулярные хорды квадрата, проходящие через его центр, равны. Верно ли обратное?

41.6. Докажите, что любая хорда полосы делится пополам ее средней линией.

41.7. Придумайте сами задачу о свойствах фигур, которую можно решить, используя движение.

41.8. Восстановите:

а) угол по биссектрисе и точке на его стороне;
б) полосу по средней линии и точке на границе;
в) равнобедренный треугольник по оси симметрии и двум точкам на его боковых сторонах;
г) равносторонний треугольник по его центру и трем точкам на его сторонах;
д) квадрат по четырем точкам на его сторонах;
е) треугольник по серединам его сторон;
ж) пятиугольник по серединам его сторон.

41.9. Расскажите о симметрии фигур, изображенных на *рисунках 383 — 384.*

§ 42 Подобие

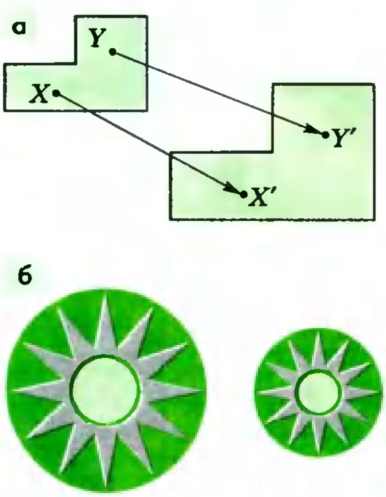


Рис. 385

42.1 Определение подобия. На практике постоянно встречаются преобразования, при которых все расстояния изменяются в одном и том же отношении, т. е. умножаются на одно и то же число. Такое преобразование называется **подобным** (или **подобием**), а это число называется **коэффициентом подобия.** Например, при увеличении фотографии все размеры (расстояния на фотографии) увеличиваются в одном и том же отношении, т. е. происходит подобное преобразование с фотопленки на фотобумагу. Подобное преобразование совершается и тогда, когда делают уменьшенную копию чертежа, рисунка и т. п. Так, например, вы поступаете, когда срисовываете с доски чертеж в свою тетрадь.

Подобием фигуры с коэффициентом $k>0$ называется такое ее преобразование, при котором любым двум точкам X и Y фигуры сопоставляются такие точки X' и Y', что $X'Y'=k\cdot XY$ (рис. 385, а).

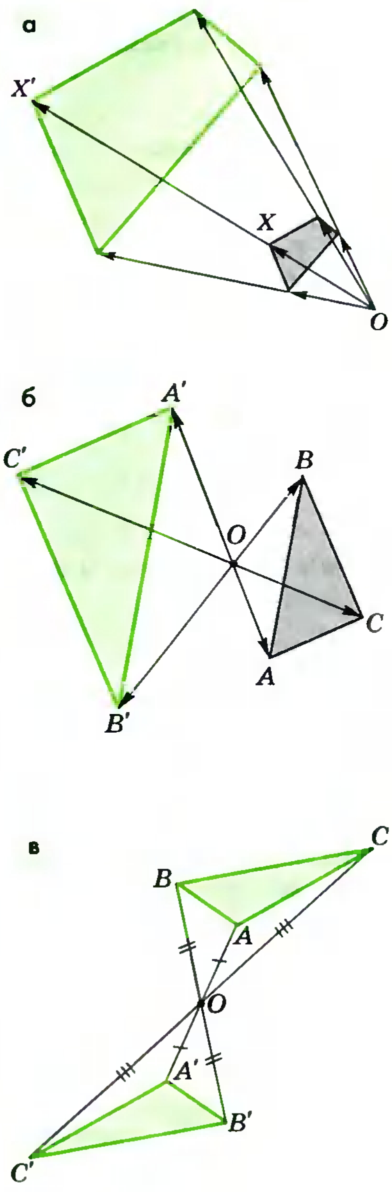


Рис. 386

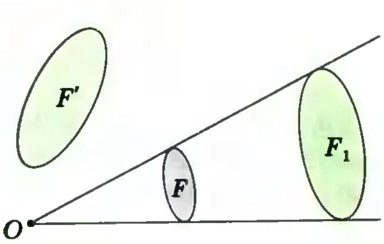


Рис. 387

Фигура F' называется подобной фигуре F с коэффициентом k, если существует подобие с коэффициентом k, переводящее F в F'.

Подобные фигуры имеют одинаковую форму, но различные размеры *(рис. 385, б)*. В частном случае k может быть равно 1, и потому движение является подобием. Простейшим, но важным примером подобия, отличным от движения, является гомотетия («гомотетичный» в переводе с греческого означает «равнорасположенный»).

42.2 Гомотетия. **Гомотетия с центром O и коэффициентом k** (отличным от нуля) — это преобразование, при котором каждой точке X сопоставляется такая точка X', что $\overrightarrow{OX'} = k \cdot \overrightarrow{OX}$ *(рис. 386, а)*. Не исключается, что $k < 0$ *(рис. 386, б)*.

При $k = -1$ получается центральная симметрия с центром в точке O *(рис. 386, в)*. При $k = 1$ получается тождественное преобразование. Значит, в частных случаях гомотетия может быть движением.

Основное свойство гомотетии. **При гомотетии с коэффициентом k каждый вектор умножается на k.**

Подробнее: если точки A, B при гомотетии с коэффициентом k перешли в точки A', B', то $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$.

• **Доказательство.** Пусть точка O — центр гомотетии. Тогда $\overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB'} = k\overrightarrow{OB}$. Поэтому

$$\overrightarrow{A'B'} = \overrightarrow{OB'} - \overrightarrow{OA'} = k\overrightarrow{OB} - k\overrightarrow{OA} = k(\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}) = k\overrightarrow{AB}.$$

Из равенства $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$ следует, что $A'B' = |k|AB$. Последнее равенство означает, что гомотетия с коэффициентом k является подобием с коэффициентом $|k|$.

Мы уже говорили, что гомотетия важна. Дело в том, что

любое подобие с коэффициентом k можно осуществить, выполнив сначала гомотетию с коэффициентом k (и любым центром), а затем движение.

• Действительно, пусть фигура F' получена из фигуры F подобием с коэффициентом k *(рис. 387)*. Гомотетией с коэффициентом k (и любым центром) переведем фигуру F в фигуру F_1. Тогда любым точкам X, Y фигуры F ставятся в соответствие такие точки X_1, Y_1, что $X_1Y_1 = kXY$. Но и для точек X', Y' фигуры F', соответствующих точкам X, Y, также $X'Y' = kXY$. Поэтому $X'Y' = X_1Y_1$.

Это равенство, верное для любых точек, означает, что $F' = F_1$, т. е. F_1 можно некоторым движением перевести в фигуру F'.

Свойства движений нам известны. Сейчас мы установим свойства гомотетии. Так как подобие сводится к последовательному выполнению гомотетии и движения, то сразу после этого выясним и свойства подобия.

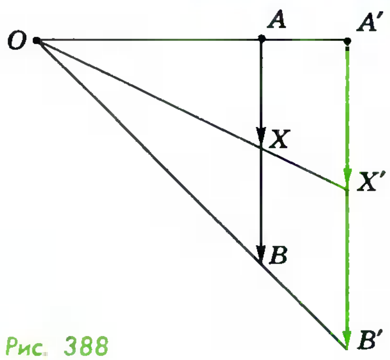


Рис. 388

42.3 **Свойства гомотетии.** Сразу договоримся, что везде в этом пункте мы считаем некоторую точку O центром гомотетии с коэффициентом k. Далее, образы точек в результате гомотетии будем обозначать теми же буквами, что и сами точки, но со штрихами.

Свойство 1. Гомотетия отрезок переводит в отрезок.

• **Доказательство.** Пусть гомотетия переводит концы отрезка AB в точки A', B' *(рис. 388)*. Точка $X \in AB$ тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{AX} = t \cdot \overrightarrow{AB}$, где $0 \leqslant t \leqslant 1$. При этом если число t возрастает от 0 до 1, то X пробегает отрезок AB от A к B. По основному свойству гомотетии $\overrightarrow{A'X'} = k\overrightarrow{AX}$ и $\overrightarrow{A'B'} = k\overrightarrow{AB}$. Выразим из этих равенств

$$\overrightarrow{AX} = \frac{1}{k}\overrightarrow{A'X'} \text{ и } \overrightarrow{AB} = \frac{1}{k}\overrightarrow{A'B'}.$$

Подставим эти значения $\overrightarrow{AX}$ и $\overrightarrow{AB}$ в равенство $\overrightarrow{AX} = t \cdot \overrightarrow{AB}$. Получим $\frac{1}{k}\overrightarrow{A'X'} = t \cdot \frac{1}{k}\overrightarrow{A'B'}$, откуда $\overrightarrow{A'X'} = t\overrightarrow{A'B'}$. А это равенство означает, что, когда число t возрастает от 0 до 1, точка X' пробегает отрезок $A'B'$.

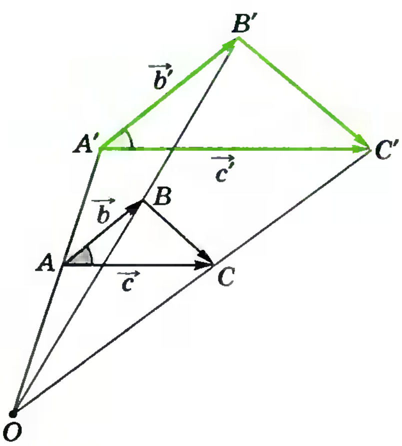


Рис. 389

Свойство 2. Гомотетия сохраняет величину угла.

Подробнее: для любых точек A, B, C и соответствующих точек A', B', C' выполняется равенство $\angle B'A'C' = \angle BAC$ *(рис. 389)*.

• **Доказательство.** Обозначим $\vec{b} = \overrightarrow{AB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{AC}$, $\vec{b}' = \overrightarrow{A'B'}$, $\vec{c}' = \overrightarrow{A'C'}$. Тогда $\angle BAC = \angle \vec{b}\vec{c}$ и $\angle B'A'C' = \angle\, \vec{b}'\vec{c}'$. По основному свойству гомотетии $\vec{b}' = k\vec{b}$ и $\vec{c}' = k\vec{c}$. Отсюда получаем, что $|\vec{b}'| = |k|\,|\vec{b}|$, $|\vec{c}'| = |k|\,|\vec{c}|$. Кроме того, $\vec{b}' \cdot \vec{c}' = (k\vec{b}) \cdot (k\vec{c}) = k^2 \cdot (\vec{b}\vec{c})$. Но тогда

$$\cos\ \angle \vec{b}'\vec{c}' = \frac{\vec{b}' \cdot \vec{c}'}{|\vec{b}'||\vec{c}'|} = \frac{k^2 \cdot (\vec{b}\vec{c})}{|k|^2|\vec{b}|\,|\vec{c}|} = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{|\vec{b}| \cdot |\vec{c}|} = \cos \angle \vec{b}\vec{c}.$$

Из равенства косинусов и следует равенство углов.

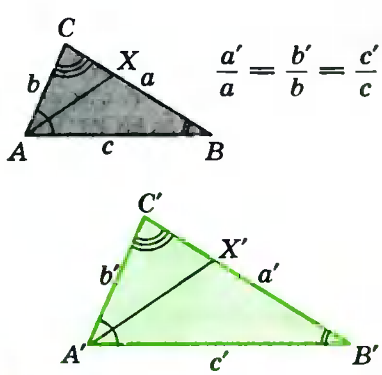


Рис. 390

Свойство 3. Гомотетия треугольник переводит в треугольник. Стороны этих треугольников пропорциональны, а соответственные углы равны.

Подробнее: пусть дан $\triangle ABC$ и гомотетия переводит точки A, B, C в точки A', B', C' *(рис. 390)*. Тогда $\triangle ABC$ переходит в $\triangle A'B'C'$ и при этом $\frac{A'B'}{AB} = \frac{B'C'}{BC} = \frac{C'A'}{CA}$, $\angle A' = \angle\ A$, $\angle B' = \angle B$, $\angle C' = \angle C$.

• **Доказательство.** То, что $\triangle ABC$ переходит в $\triangle A'B'C'$, вытекает из свойства 1. Действительно, $\triangle ABC$ заполняют отрезки AX, где $X \in BC$. Эти отрезки переходят в отрезки $A'X'$, причем $X' \in B'C'$. Отрезки $A'X'$ и заполнят $\triangle A'B'C'$. Пропорциональность сторон и равенство углов докажите самостоятельно.

42.4 **Свойства подобия.** Первые три свойства вытекают из соответствующих свойств гомотетии и движения.

Свойство 1. Подобие отрезок переводит в отрезок.
Свойство 2. Подобие сохраняет величину угла.
Свойство 3. Подобие переводит треугольник в треугольник. Соответственные стороны этих треугольников пропорциональны, а соответственные углы равны (рис. 390).

(Соответственные стороны — это значит сторона и ее образ. То же и для углов. Таким образом, соответственные стороны — это AB и $A'B'$, BC и $B'C'$, AC и $A'C'$, если исходный треугольник обозначен ABC, а его образ — $A'B'C'$.)

Эти свойства вы легко докажете сами.

Свойство 4. В результате подобия с коэффициентом k площадь многоугольной фигуры умножается на k^2.

• **Доказательство.** Площадь треугольника равна половине произведения двух его сторон и синуса угла между ними. В результате подобия с коэффициентом k каждая сторона умножается на k, а углы сохраняются. Поэтому площадь треугольника умножается на k^2.

Многоугольные фигуры слагаются из треугольников. Так как площадь каждого умножится на k^2, то и вся сумма умножится на k^2, поэтому площадь многоугольной фигуры умножится на k^2.

42.5 **Признаки подобия треугольников.** Как мы уже установили, у подобных треугольников соответственные стороны пропорциональны, а соответственные углы равны. Чтобы установить подобие двух треугольников, достаточно наличия части этих свойств.

Теорема 38 *(первый признак подобия).* **Если стороны одного треугольника пропорциональны сторонам другого треугольника, то эти треугольники подобны.**

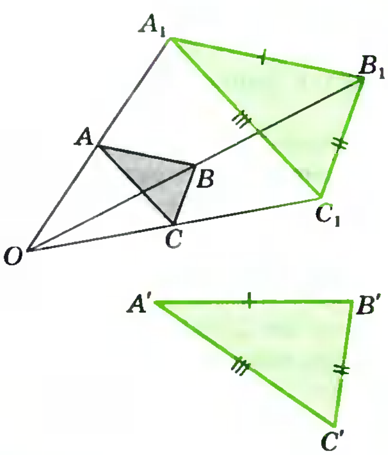


Рис. 391

• **Доказательство.** Пусть стороны треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ пропорциональны, т. е. $\frac{A_1B_1}{AB}=\frac{B_1C_1}{BC}=\frac{C_1A_1}{CA}=k$. Укажем подобие, которое переводит $\triangle ABC$ в $\triangle A_1B_1C_1$.

Сначала переведем $\triangle ABC$ гомотетией с любым центром и коэффициентом k в $\triangle A_2B_2C_2$ (рис. 391). Так как $A_2B_2=kAB$, $A_2C_2=kAC$ и $B_2C_2=kBC$, а из условия следует, что $A_1B_1=kAB$, $A_1C_1=kAC$, $B_1C_1=kBC$, то $A_2B_2=A_1C_1$, $B_2C_2=B_1C_1$, $A_2C_2=A_1C_1$. Поэтому $\triangle A_2B_2C_2=\triangle A_1B_1C_1$. Тогда, как доказано в п. 40.7, найдется движение, которое переводит $\triangle A_2B_2C_2$ в $\triangle A_1B_1C_1$.

Выполнив сначала гомотетию, а затем движение, мы осуществили подобие, которое переводит $\triangle ABC$ в $\triangle A_1B_1C_1$.

Теорема 39 *(второй признак подобия).* **Если два угла одного треугольника равны двум углам другого треугольника, то такие треугольники подобны.**

• **Доказательство.** Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ $\angle A_1=\angle A$, $\angle B_1=\angle B$. Отсюда ясно, что $\angle C_1=\angle C$. По теореме синусов из $\triangle ABC$ получим $\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}$, а из $\triangle A_1B_1C_1$ получим $\frac{a_1}{b_1}=\frac{\sin A_1}{\sin B_1}$. Из равенства углов этих треугольников следует равенство их синусов, а значит, и выражений в правых частях. Отсюда $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a}{b}$. Но тогда $\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}$. Точно так же получаем, что $\frac{a_1}{a}=\frac{c_1}{c}$. Итак, $\frac{a_1}{a}=\frac{b_1}{b}=\frac{c_1}{c}$, т. е. стороны треугольников пропорциональны. Значит, треугольники подобны.

Теорема 40 *(третий признак подобия).* **Если две стороны одного треугольника пропорциональны двум сторонам другого треугольника и углы, заключенные между этими сторонами, равны, то такие треугольники подобны.**

• **Доказательство.** Пусть у треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ $a_1=ka$, $b_1=kb$, $\angle C_1=\angle C$.

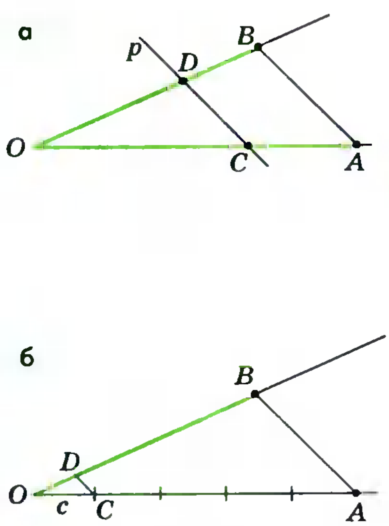
По обобщенной теореме Пифагора (п. 25.1)

$$c_1^2=a_1^2+b_1^2-2a_1b_1\cos C_1 \text{ и } c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

А так как $a_1=ka$, $b_1=kb$ и $\cos C_1=\cos C$, то

$$c_1^2=k^2a^2+k^2b^2-2k^2ab\cos C=k^2(a^2+b^2-2ab\cos C)=k^2c^2.$$

Поскольку $c_1^2=k^2c^2$, то $c_1=kc$ и, стало быть, все стороны треугольников ABC и $A_1B_1C_1$ пропорциональны. По первому признаку подобия эти треугольники подобны.



$OA=nc$, $OB=b$, $n=5$

Рис. 392

42.6 **Метод подобия.** При решении задач на построение методом подобия всегда приходится решать следующую задачу:

Задача *(построение четвертого пропорционального отрезка).* Даны три отрезка a, b, c. Построить такой отрезок x, что $a:b=c:x$

Решение. Возьмем любой угол O. На одной его стороне отложим отрезки $OA=a$ и $OC=c$, а на другой — отрезок $OB=b$ (рис. 392, а). Через точку C проведем прямую $p\parallel AB$. Она пересечет луч OB в точке D. Докажем, что OD — искомый отрезок x. Треугольники OAB и OCD подобны (по второму признаку подобия). Поэтому $OA:OC=OB:OD$, т. е. $OD=x$.

В частном случае эта задача позволяет разделить отрезок на n равных частей.

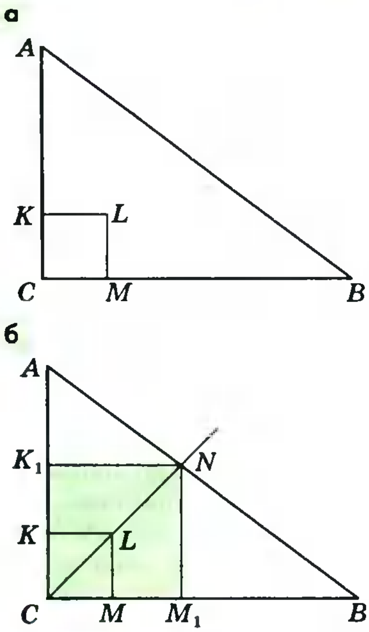


Рис. 393

Обозначим данный отрезок b. Возьмем любой отрезок c, и пусть $a = nc$ *(рис. 392, б)*.

Поскольку $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$, то $x = \frac{b}{a}c = \frac{b}{nc}c = \frac{1}{n}b$.

Решая задачу методом подобия, сначала строим фигуру, удовлетворяющую всем требованиям задачи, кроме одного. А затем с помощью подобия строим искомую фигуру.

Задача. **Построить квадрат, расположенный в прямоугольном треугольнике, так, что три его вершины лежат на катетах, а четвертая — на гипотенузе.**

Построение. В прямоугольном треугольнике ABC построим какой-нибудь квадрат $CKLM$ так, что точка K лежит на CA, а точка M — на CB *(рис. 393, а)*. Неважно, где при этом окажется точка в четырехугольнике: внутри или вне его (если она окажется на стороне AB, то задача уже решена). Проведем луч CL. Пусть он пересекает AB в точке N. Из точки N проводим перпендикуляры на катеты: $NK_1 \perp CA$, $NM_1 \perp CB$.

Четырехугольник CK_1NM_1 — квадрат, который нам нужен *(рис. 393, б)*.

Докажем это. Так как в нем три угла прямые, то CK_1NM_1 — прямоугольник. Осталось доказать равенство его соседних сторон. Треугольники CKL и CK_1N подобны, так как имеют по два равных угла. Из их подобия следует, что $\frac{NK_1}{LK} = \frac{K_1C}{KC}$. Так как $LK = KC$, то $NK_1 = K_1C$.

Именно эту задачу легко решить и не пользуясь методом подобия (как?). Но если ее обобщить и поставить, например, задачу о построении прямоугольника, так же расположенного, как и квадрат, но с отношением сторон 2:1, то срабатывает как раз указанный метод построения и доказательства. ◆

И еще одну теорему докажем, используя подобие.

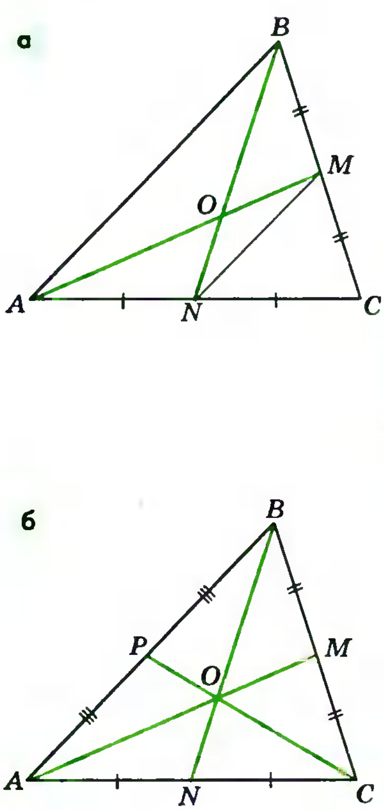


Рис. 394

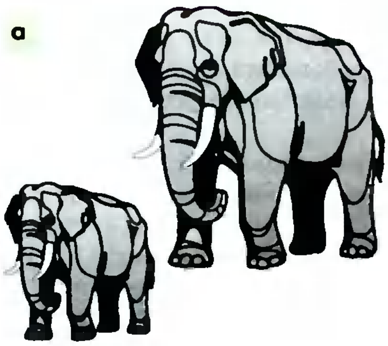
Теорема 41. **Медианы треугольника пересекаются в одной точке, и каждая медиана делится этой точкой в отношении 2 : 1** (считая от вершины треугольника).

• **Доказательство.** Пусть медианы AM и BN треугольника ABC пересекаются в точке O *(рис. 394, а)*. Проведем среднюю линию MN. Напомним, что $MN \parallel AB$ и $MN = \frac{1}{2}AB$. Поэтому треугольник OAB подобен треугольнику OMN с коэффициентом подобия 2. Следовательно, $OA : OM = OB : ON = 2 : 1$.

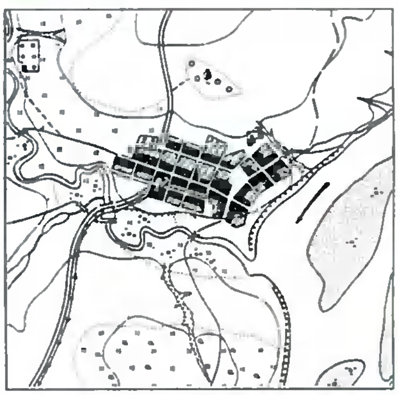
Покажем, что и медиана CP проходит через точку O *(рис. 394, б)*. Повторим проведенные рассуждения для медиан AM и CP. Снова получим, что они пересекаются в такой точке на медиане AM, которая делит AM в отношении 2:1. Этой точкой является точка O. Поэтому CP проходит через O.

Точка пересечения медиан треугольника называется **центром масс треугольника** (или **центроидом треугольника**).

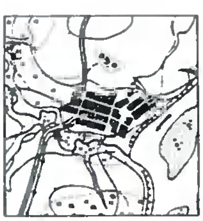
а



б



1 : 25000



1 : 50000

Рис. 395

42.7 **Подобия при изображении плоских фигур.** Подобие фигур лежит в основе их изображения: правильное, неискаженное изображение подобно изображаемому *(рис. 395, а)*. Всякий план, будь то план города или квартиры, представляет собой подобное изображение. Изображаемый объект рассматривается как плоская фигура, и в плане рисуется подобная ей фигура. Например, город представляется как фигура, состоящая из кварталов застройки и улиц; кварталы застройки представляют собой многоугольную фигуру. На плане изображается подобная ей фигура *(рис. 395, б)*. **Масштаб**, в котором выполнен план, не что иное, как коэффициент подобия. Когда пишут, например, масштаб 1:100 000, это и значит, что коэффициент подобия равен 0,00001, иначе говоря, масштаб — 1 километр в сантиметре. При этом численные значения длин на плане те же, что в действительности. Только на плане эти значения берутся в масштабе — в сантиметрах, а в действительности — в километрах. Пользуясь планами и картами, так и определяют по ним расстояния.

Замечание. Вполне точное изображение земной поверхности на картах невозможно: отношения длин неизбежно искажаются, так как Земля не плоская. Но для сравнения небольших участков это не существенно.

1. В чем заключается подобное преобразование фигуры?
2. Какие фигуры называются подобными?
3. Приведите примеры подобных преобразований фигуры.
4. В чем заключается гомотетичное преобразование фигуры?
5. Из чего следует, что гомотетия является подобием?
6. Какие свойства гомотетии вам известны?
7. Откуда следует, что гомотетия всякую прямую переводит в параллельную ей прямую или совпадающую? (В каком случае совпадение?)
8. Какие свойства подобия вам известны?
9. Как построить треугольник, подобный данному? многоугольник, подобный данному?
10. Какие признаки подобия треугольников вы знаете?
11. Откуда следует подобие: а) равносторонних треугольников; б) квадратов; в) одноименных правильных многоугольников; г) окружностей?
12. В чем заключается метод подобия при решении задач? Приведите примеры задач, которые решаются этим методом.
13. Что такое масштаб карты с точки зрения подобия?
14. Вы начертили план квартиры, в которой живете, в масштабе 1:20. Во сколько раз площадь квартиры больше площади плана этой квартиры?

Задачи к § 42

42.1. а) Пусть фигура F_2 подобна фигуре F_1 с коэффициентом подобия k. С каким коэффициентом фигура F_1 подобна фигуре F_2?
42.1
б) Пусть фигура F_2 подобна фигуре F_1 с коэффициентом k_1, фигура F_3 подобна фигуре F_2 с коэффициентом k_2. С каким коэффициентом фигура F_3 подобна фигуре F_1?

42.2. Нарисуйте отрезок AB и отрезок $AB_1=2AB$. Пусть каждой точке $X\in AB$ соответствует точка $X_1\in AB_1$, такая, что $AX_1=2AX$. Докажите, что такое преобразование AB является подобием. Укажите подобное преобразование AB_1 в AB.

42.3. Нарисуйте два неравных отрезка AB и A_1B_1. Пусть $A_1B_1=k\cdot AB$. Можно ли найти подобное преобразование: а) AB в A_1B_1; б) A_1B_1 в AB?

42.4. Докажите, что подобны две окружности: а) концентрические; б) произвольные. Укажите другие примеры подобных фигур.

42.5. Отметьте точку O — центр гомотетии и точку A. Постройте образ точки A,
42.2
если коэффициент гомотетии k равен: а) 2; б) $\frac{1}{3}$; в) -4; г) 1.

42.3 **42.6.** Какая фигура получится в результате гомотетии: а) квадрата; б) окружности?

42.7. Нарисуйте треугольник ABC. Постройте треугольник, ему гомотетичный:
а) с центром A и $k=2$;
б) с центром B и $k=\frac{1}{2}$;
в) с центром C и $k=-2$;
г) с центром A_1 — серединой BC и $k=2$;
д) с центром O — серединой AC и $k=-\frac{1}{2}$.

42.8. Нарисуйте квадрат $ABCD$. Нарисуйте гомотетичный ему квадрат:
а) с центром гомотетии на стороне и $k=-\frac{2}{3}$;
б) с центром гомотетии на средней линии и $k=-\frac{1}{3}$;
в) с центром гомотетии на диагонали и $k=2$.

42.9. Нарисуйте окружность. Постройте ей гомотетичную с центром гомотетии: а) на окружности; б) внутри круга; в) вне круга. Каждое задание выполните с такими коэффициентами гомотетии: 2; $\frac{1}{2}$; -2.

42.10. Нарисуйте любой многоугольник. Постройте гомотетичный ему, взяв центр гомотетии: а) в вершине; б) в произвольной точке. (Коэффициент любой.)

42.4 **42.11.** Докажите, что в результате подобия:
а) середина отрезка переходит в середину отрезка;
б) сохраняется перпендикулярность прямых;
в) сохраняется параллельность прямых;
г) окружность переходит в окружность, а круг — в круг.

42.12. Рассматривается подобие треугольника. Что будет образом: а) медианы; б) биссектрисы; в) высоты; г) центра вписанной окружности; д) центра описанной окружности?

42.13. Объясните, почему в результате подобия треугольник сохраняет свой вид — по сторонам и по углам.

42.14. В треугольнике проведена средняя линия. Докажите, что она отсекает от него
42.5
подобный треугольник. Чему равен коэффициент этого подобия?

42.15. В треугольнике проведена хорда, параллельная стороне. Докажите, что она отсекает подобный треугольник. Проверьте обратное.

42.16. Из точки O выходят три луча: a, b, c. На луче a находятся точки A и A_1, на луче b — точки B и B_1, на луче c — точки C и C_1. При этом $A_1B_1\parallel AB$, $B_1C_1\parallel BC$, $C_1A_1\parallel CA$. Докажите, что треугольники $A_1B_1C_1$ и ABC подобны.
Докажите то же, если точки A_1, B_1, C_1 взять на продолжении лучей a, b, c.

42.17. Сформулируйте и докажите признаки подобия: а) прямоугольных треугольников; б) равнобедренных треугольников.

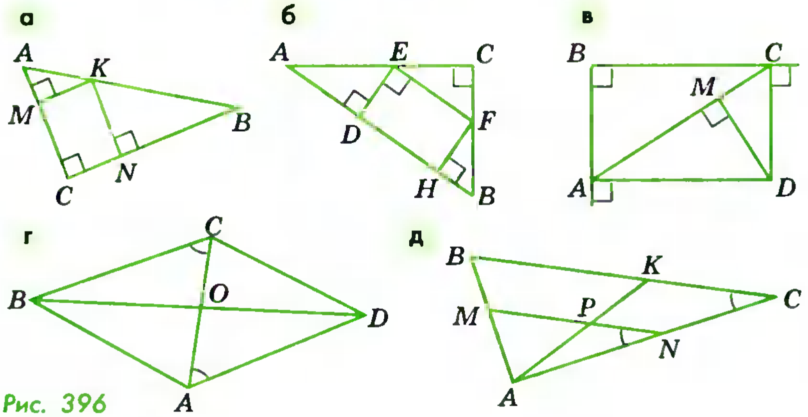


Рис. 396


Фалес

42.18. Докажите, что отношение периметров подобных треугольников равно коэффициенту подобия. Обобщите это утверждение.

42.19. На одной стороне угла отложили отрезки и через их концы провели параллельные прямые, пересекающие стороны угла. В результате на другой стороне угла образуется такое же число соответствующих отрезков. Докажите, что отношение двух любых соответствующих отрезков равно отношению двух исходных отрезков. В частном случае, когда исходные отрезки равны, это утверждение называют теоремой Фалеса по имени знаменитого древнегреческого мыслителя **Фалеса Милетского** (ок. 625 — ок. 547 гг. до н. э.).

42.20. Укажите пары подобных треугольников на *рисунке 396*.

42.21. Чему равен неизвестный отрезок x на *рисунке 397*?

42.22. Один конец отрезка лежит на данной прямой, а другой конец удален от нее на расстояние d. Чему равно расстояние до прямой от середины отрезка? от точки, делящей его в отношении $2:1$? от точки, делящей его в отношении $p:q$?

42.23. Один конец отрезка удален от данной прямой на расстояние d_1, а другой — на расстояние d_2. Отрезок находится по одну сторону от прямой. Ответьте на те же вопросы, что и в предыдущей задаче. Сохранятся ли полученные результаты, если отрезок пересекает прямую?

42.24. Нарисуйте треугольник, а в нем медиану. Докажите, что каждая хорда треугольника, параллельная той стороне, к которой проведена медиана, делится этой медианой пополам. Попробуйте обобщить задачу.

42.25. Нарисуйте треугольник, а в нем все средние линии. Сколько треугольников, подобных данному, на этом рисунке? Какую часть площади данного треугольника составляет площадь треугольника, образованного средними линиями?

42.26. Какую часть составляет площадь x от площади S на *рисунке 398*, если на рисунках в), г), д), е), ж) S — площадь треугольника ABC, а на рисунке з) S — площадь четырехугольника $ABCD$?

42.27. В треугольнике ABC провели к его сторонам высоты AK и CL. Докажите, что треугольники BKL и BAC подобны. Будут ли они подобны, если высоты будут проведены к продолжениям сторон треугольника?

42.6 **42.28.** Постройте прямоугольный треугольник по отношению катетов (например, один катет в 2 раза больше другого) и: а) гипотенузе; б) периметру.

42.29. Постройте квадрат, вписанный в данный: а) треугольник; б) ромб; в) сегмент. Все вершины квадрата должны лежать на границе данной фигуры.

42.30. В данный сектор впишите: а) равносторонний треугольник; б) квадрат; в) окружность.

42.31. Из куска проволоки надо сделать треугольник нужной формы (т. е. подобный некоторому треугольнику). Как вы будете действовать?

42.7 **42.32.** На земле квадратный участок имеет площадь 1 га. Каковы размеры этого участка на карте масштабом: а) $1:25\,000$; б) $1:50\,000$?

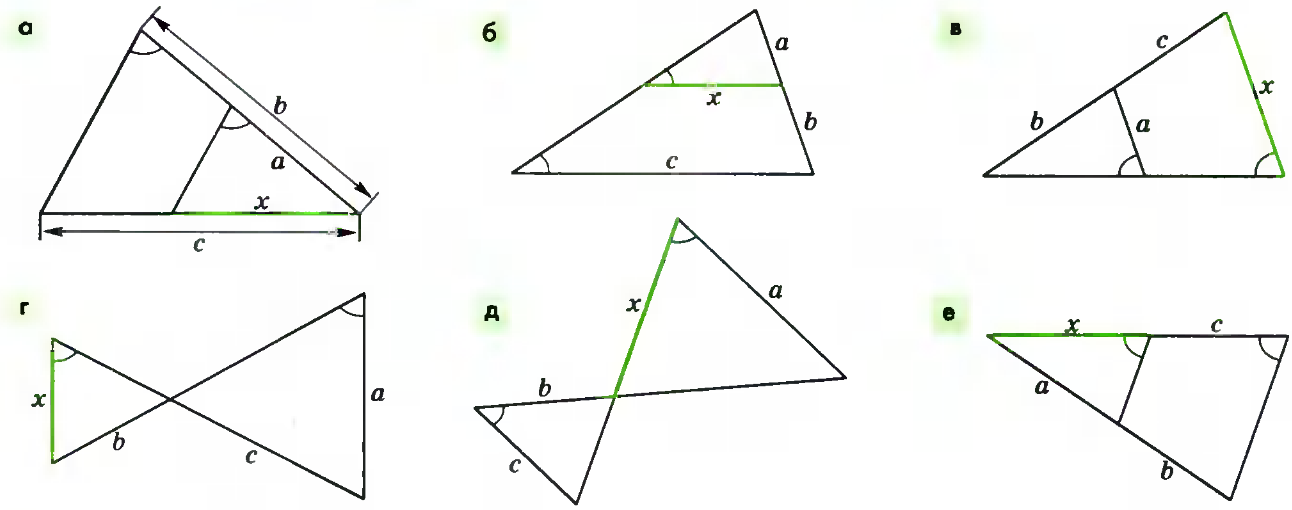


Рис. 397

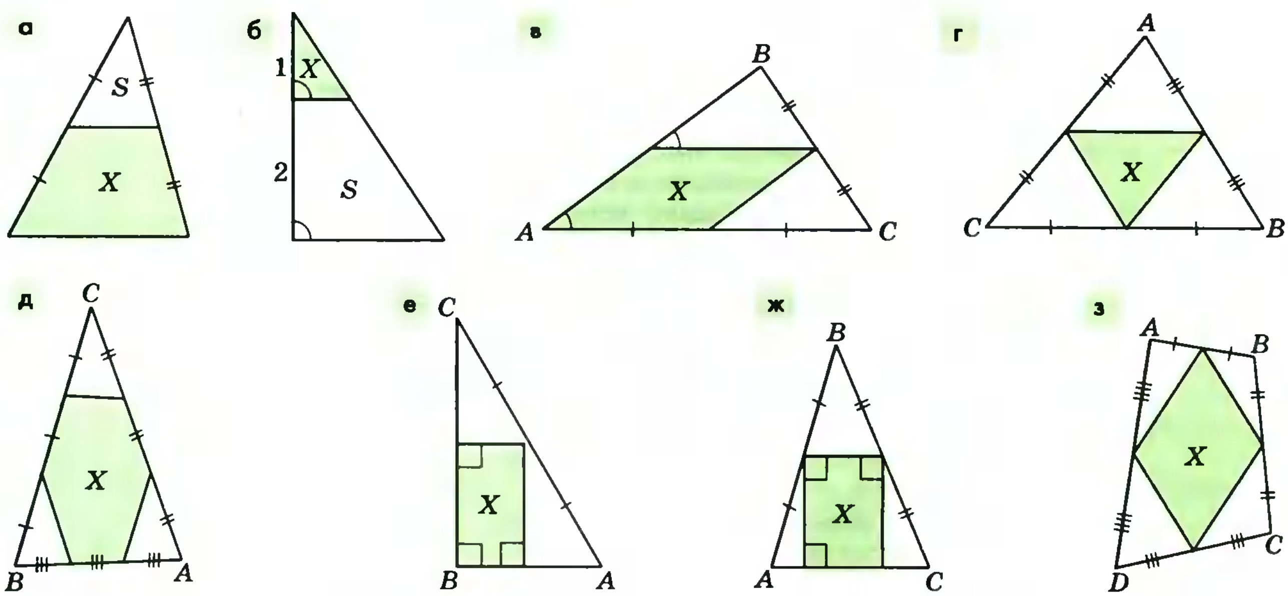


Рис. 398

42.33. Как с помощью подобия можно: а) вычислить расстояние до недоступной точки; б) вычислить расстояние между двумя недоступными точками; в) вычислить высоту объекта; г) провести на земле прямую на невидимый объект?

42.34. На каком удалении от вас находится человек, идущий перпендикулярно линии наблюдения? В одной из книг дается такой ответ: «Закройте левый глаз, вытяните руку вперед и отогните большой палец. Уловив момент, когда палец прикроет фигуру идущего вдали человека, закройте правый глаз, а левый откройте и сосчитайте, сколько шагов сделает человек до того момента, когда палец вновь прикроет фигуру. Увеличив полученное число в 10 раз, вы узнаете расстояние от него в шагах». На чем основан такой прием?

Итоги 9 класса

Две главы 9 класса различаются прежде всего по методам. В главе VII, названной «Фигуры вращения», эти фигуры изучаются традиционным синтетическим методом элементарной геометрии, идущим от геометров Древней Греции. Основная цель этой главы — вывести формулы для длины окружности и площади круга: $L = 2\pi R$ и $S = \pi R^2$. Такие формулы были получены в § 34. При выводе этих формул мы приближали круг правильными многоугольниками. Поэтому такие многоугольники были изучены в § 33. В § 35 рассмотрены важнейшие фигуры вращения — сфера и шар, цилиндр и конус.

В главе VIII рассказано о понятиях и методах, характерных для современной геометрии: о координатах и методе координат (§ 36), о векторном методе (п. 37.5 и п. 38.4), о преобразованиях и методах преобразований (§ 39, 40 и 42). Отдельный параграф (§ 41) посвящен симметрии фигур. Эти понятия и методы вошли в геометрию сравнительно (с ее тысялетней историей) недавно — в XVII—XX вв. Знакомство с ними необходимо каждому культурному человеку: они широко используются не только в геометрии.

Можно было бы весь курс элементарной геометрии изложить, используя один из этих трех методов. Но это сузило бы ваши представления о геометрии и богатстве ее возможностей. Многие из геометрических задач могут быть решены каждым из перечисленных методов. Эти решения будут различны: одно из них проще (или коро-че), другое более изящно (или более красиво). Выбрать более простой метод решения геометрической задачи не всегда легко. Мы выделили специальные пункты, посвященные решению задач координатным и векторным методами, а также методами преобразований (их несколько).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основания планиметрии

1 **Постановка вопроса.** В начале курса было сказано, что в геометрии только самые начальные сведения берутся из практики и наблюдения, они наглядны и очевидны. Все ее дальнейшие утверждения обосновываются путем логических рассуждений.

Так мы и поступали, когда доказывали теоремы, решали задачи. Однако в наших доказательствах мы не только пользовались чисто логическими рассуждениями, но и нередко опирались на очевидность. Например, в аксиоме об откладывании угла говорится, что угол можно отложить от данного луча по одну или по другую сторону от него. Точного определения, что означает «по одну или другую сторону», не было дано — мы полагались на очевидность. Но как дать определение?

Обычное определение состоит в том, что одно понятие разъясняется с помощью других, которые считаются известными. Допустим, эти известные понятия тоже можно определить через другие. Но так продолжать без конца невозможно. Мы придем к понятиям, определить которые через другие уже нельзя; их можно только пояснить, показать на примерах. Сами же эти понятия будут служить для определения других понятий. Они в этом смысле будут исходными, основными.

Итак, нужно выявить **основные понятия** изучаемой нами геометрии, а остальные определить через них.

Однако этого еще недостаточно. Доказывая какое-нибудь утверждение, теорему, мы опираемся на некоторые предпосылки, на то, что уже считается известным. Но и эти предпосылки тоже нужно обосновывать и т. д. Так продолжать до бесконечности невозможно, и мы придем к предпосылкам, которые должны быть приняты за исходные. Эти исходные положения — **аксиомы** — принимаются без доказательства и составляют основу для доказательства теорем. Мы сформулировали в начале курса ряд аксиом. Но исчерпывают ли они все то, чем мы на самом деле пользовались в наших выводах?

Так, мы предполагали, что данным отрезком e, принятым за масштаб, можно измерить любой отрезок (с заранее указанной точностью), откладывая на нем отрезки, равные e, или их доли $(\frac{e}{2}, \frac{e}{4}, \ldots)$. Однако можно мыслить, что существуют столь большие отрезки, что, сколько раз на таком отрезке ни откладывать отрезки, равные e, все будет оставаться остаток, больший e. Ясно, что такого быть не может. Но для логических выводов нужна явная формулировка, и надо либо доказать, либо принять за аксиому, что такое невозможно. Еще в древности греки поняли это и высказали такую аксиому (она называется **аксиомой Архимеда**): **для любых двух отрезков a и b найдется такое натуральное число n, что $na>b$.**

Мы часто пользовались тем, что если прямая проходит через какую-нибудь точку внутри круга, то такая прямая пересекает его окружность в двух точках. Это очевидно. Однако почему нельзя было бы предположить, что как раз там, где окружность должна пересечь прямую, нет никакой точки: там как бы дыра и окружность переходит с одной стороны от прямой на другую, не пересекая прямой? Это невозможно, говорим мы, потому что прямая сплошная, непрерывная, в ней нет дыр. Но это наше представление нужно явно и точно выразить, значит, нужна особая аксиома — «аксиома непрерывности».

Сделаем еще одно замечание. В начале курса, начиная разговор об отрезках, мы сказали: «У каждого отрезка два конца — те две точки, которые он соединяет». Мы не подчеркнули это как особую аксиому. Но при полном изложении и это утверждение нужно высказать как аксиому, отражающую одно из основных свойств отрезка.

Итак, задача состоит в том, чтобы выделить основные понятия, сформулировать как аксиомы все положения, которые принимаются без доказательств, и тем дать основу для действительно логического построения планиметрии: для определения других ее понятий и доказательства ее положений в качестве теорем. В этом смысле и говорят, что список основных понятий и формулировки аксиом составляют основания планиметрии.

Замечание. Принимать за основные можно разные понятия, так же как принимать за аксиомы можно разные утверждения планиметрии. Получаются разные ее основания. Но все они дают одни и те же результаты. Примеры таких различных построений планиметрии вы получите, если сравните, например, разные школьные учебники геометрии.

2 Основные понятия и определения. Основные понятия, которые выделяют при строгом построении геометрии, делятся на два вида: одни обозначают **объекты**, которыми занимается геометрия, другие обозначают **отношения** между ними. Так, точка и отрезок — это объекты, а то, что точка принадлежит отрезку, — отношение между ними. За основные объекты мы принимаем следующие: **1) точки; 2) отрезки; 3) фигуры**. При этом точки и отрезки считаются частными видами фигур.

За основные отношения между этими объектами принимаются: 1) **точка принадлежит фигуре**, в частности отрезку; 2) **точка является концом отрезка; 3) два отрезка равны.**

Отношение равенства отрезков служит основным понятием, оно не определяется. Наглядно оно поясняется наложением одного отрезка на другой, но это не определение. Если бы мы сказали, что отрезки называются равными, если один можно наложить на другой, то надо было бы либо определить, что значит наложить, либо принять наложение за основное понятие.

Теперь напомним несколько известных определений, выражая их через основные понятия.

1. Фигура называется **объединением** некоторых данных фигур, если ей принадлежат все точки этих фигур, и никакие другие.

2. **Прямой** AB называется фигура, являющаяся объединением всевозможных отрезков, содержащих точки A и B.

3. **Лучом** AB называется фигура, являющаяся объединением всевозможных отрезков с концом A, содержащих точку B.

4. **Полуплоскостью**, ограниченной прямой a, называется фигура, обладающая следующими свойствами: 1) она содержит прямую a, но не совпадает с ней; 2) если точки A, B принадлежат полуплоскости, но не прямой a, то отрезок AB не имеет общих точек с a; 3) если же точка A принадлежит полуплоскости, а B нет, то отрезок AB имеет с прямой a общую точку.

После того как дано определение полуплоскости, понятия «по одну сторону от прямой» и «по разные стороны от прямой» определяются так: по одну сторону от прямой — значит в одной ограниченной ею полуплоскости; по разные стороны от прямой — значит не в одной, а в разных полуплоскостях, ограниченных этой прямой.

Определения имеют смысл не сами по себе, а лишь в связи с утверждениями, устанавливающими, что то, чему дано определение, существует. И это либо должно утверждаться в аксиомах, либо должно быть доказано из аксиом. Поэтому аксиомы должны говорить о существовании самих основных объектов и отношений между ними.

3 **Аксиоматика планиметрии.** **Аксиоматикой** называют перечень основных понятий и аксиом. Обычно говорят не перечень, а **система аксиом**, так как аксиомы связаны друг с другом и образуют в этом смысле известную систему.

Аксиомы планиметрии делятся на несколько групп. Сформулируем их. Римской цифрой обозначается номер группы, а арабской — номер аксиомы в этой группе (если их больше одной).

I. Аксиомы связи отрезков и точек.

I.1. Существуют по крайней мере две точки.

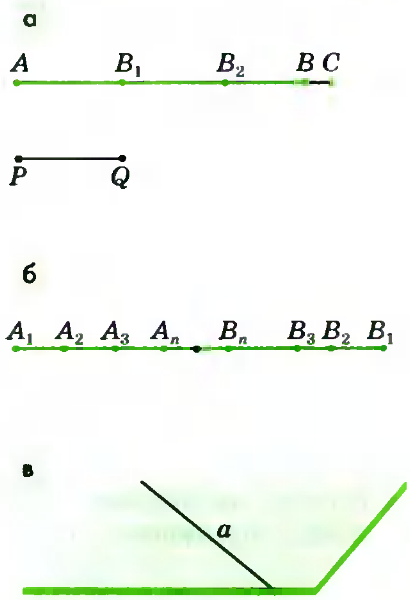


Рис. 399

I.2. Для каждых двух точек существует, и притом единственный, отрезок, концами которого являются данные точки.

I.3. У каждого отрезка есть два и только два конца, а также существуют другие принадлежащие ему точки.

О точках отрезка, отличных от его концов, говорят, что они лежат **внутри** этого отрезка.

I.4. Точка C, лежащая внутри отрезка AB, разбивает его на два отрезка AC и CB, т. е. AB есть объединение отрезков AC и CB, которые имеют лишь одну общую точку C.

I.5. Каждый отрезок можно продолжить за каждый из его концов, т. е. для каждого отрезка AB существует содержащий его отрезок AC с концом C, отличным от B.

I.6. Объединение двух отрезков, имеющих две общие точки, является отрезком; его концами служат два из концов этих отрезков.

Утверждения четырех из этих шести аксиом содержатся в § 2 — утверждения аксиом I.2, I.4, I.5, I.6. Отметим, что аксиомы I.2 и I.5 — это первый и второй постулаты Евклида.

II. Аксиомы равенства отрезков.

II.1. Два отрезка, равные одному и тому же отрезку, равны.

II.2. На каждом луче от его начала можно отложить отрезок, равный данному, и притом только один.

II.3. Если точка C лежит внутри отрезка AB, а точка C_1 лежит внутри отрезка A_1B_1 и выполняются равенства $AC=A_1C_1$ и $CB=C_1B_1$, то $AB=A_1B_1$.

II.4. Для каждых двух отрезков AB и PQ существует отрезок AC, содержащий AB и составленный из отрезков, равных PQ (аксиома Архимеда, *рис. 399, а*).

III. Аксиомы плоскости.

III.1. Каждая прямая разбивает плоскость на две полуплоскости, т. е. в объединении эти полуплоскости дают всю плоскость, а их пересечением является данная прямая (*рис. 399, б*).

III.2. Соответственные хорды равных углов равны.

III.3. По любой хорде данного угла можно от заданного луча в каждую сторону отложить угол, равный данному, и притом только один.

IV. Аксиома непрерывности. Если дана последовательность отрезков A_1B_1, A_2B_2, A_3B_3, ... и отрезок A_1B_1 содержит A_2B_2, отрезок A_2B_2 содержит A_3B_3 и вообще отрезок A_nB_n содержит $A_{n+1}B_{n+1}$, то существует точка, принадлежащая всем этим отрезкам (*рис. 399, в*).

V. Аксиома параллельности Евклида. Через точку, не лежащую на данной прямой, проходит единственная прямая, не пересекающая данную прямую (*рис. 134*).

4 **История работ по основаниям геометрии.** Итак, нами сформулирована без пропусков аксиоматика планиметрии. Опираясь на эту аксиоматику, мы последовательно вывели все основные теоремы евклидовой планиметрии. И все-таки не все понятия были строго определены и не все утверждения, не вошедшие в список аксиом, доказаны.

Лобачевский

Бойяи

Например, в самом начале курса утверждение, что *через каждые две точки проходит единственная прямая*, мы и не отнесли к аксиомам, и не доказали. Доказательство этого утверждения, обычно причисляемого к аксиомам, может быть получено из данной нами аксиоматики не очень сложно, но довольно длинно. И естественно, что в начале курса мы не доказывали это наглядно очевидное утверждение. Оно доказано в дополнении к этому разделу.

С большей строгостью можно было бы изложить и вопросы, относящиеся к измерению геометрических величин (длин, площадей). Но такое более строгое изложение — это задача не школьного курса геометрии, а специального раздела высшей математики, который называется **основаниями геометрии**. При строго логическом построении геометрии, опирающемся только на аксиомы, в принципе можно было бы вовсе не прибегать к чертежам. Но этого не делают даже в самых строгих курсах оснований геометрии.

Основания геометрии окончательно сформировались сравнительно недавно, лишь к концу XIX в. Одной из основных причин развития оснований геометрии была так называемая проблема пятого постулата Евклида, который мы формулировали в п. 14.1. На протяжении более 2000 лет многие ученые пытались доказать этот постулат, или, что равносильно, аксиому параллельности, опираясь лишь на другие аксиомы. Чаще всего они применяли способ «от противного»: заменяли аксиому параллельности противоположным ей утверждением и надеялись прийти к противоречию. Но противоречия не получалось.

Наконец, в начале XIX в. одновременно у нескольких математиков возникла мысль, что противоречия и не может получиться, что мыслима геометрия, в которой выполняется **аксиома: на плоскости через точку, не лежащую на данной прямой, проходят по крайней мере две прямые, не пересекающие данную.**

Первым выступил с этой идеей Николай Иванович **Лобачевский** (1792—1856). В 1826 г. он сделал доклад об этом в Казанском университете (где он учился и работал всю жизнь). В 1829—1830 гг. вышла первая обширная работа, посвященная новой геометрии. В 1832 г. была опубликована работа венгерского математика Яноша **Бойяи** (1802—1860) с теми же в общем результатами. Гаусс, придя одновременно к тем же выводам, не решился их опубликовать, опасаясь, как он сам объяснял, быть непонятым и подвергнуться нападкам. Опасения были справедливыми. Лобачевский и Бойяи остались непонятыми почти всеми математиками того времени: Лобачевский подвергался насмешкам, а некоторые считали его чуть ли не сумасшедшим. Однако он имел силу убеждения и мужество развивать новую геометрию и публиковать все более развернутые ее изложения. В последние годы жизни, уже ослепший, он продиктовал еще одну книгу о новой геометрии. Когда же после его смерти она была наконец понята, ее во всем мире стали называть геометрией Лобачевского, а самого Лобачевского даже сравнивали с Коперником; и справедливо, потому что Лобачевский произвел в геометрии величайший переворот. До него веками без тени сомнения было принято всеми, что есть и мыслима только одна геометрия — та, основы которой изложены у Евклида. А Лобачевский опрокинул это всеобщее убеждение: наряду с евклидовой геометрией он построил другую — неевклидову.

5 Некоторые теоремы оснований геометрии. Утверждение о том, что **через каждые две точки проходит прямая, и притом только одна,** можно доказать, опираясь на аксиомы первой группы.

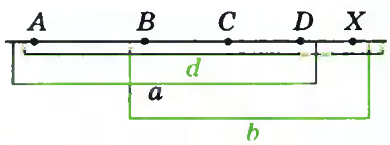


Рис. 400

• **Доказательство.** Пусть заданы две точки A и B. Согласно аксиомам I.2 и I.5 существуют отрезки, содержащие эти точки, а значит, существует и проходящая через них прямая (AB). Покажем, что такая прямая только одна.

Допустим, что некоторая прямая (CD) проходит через точки A и B. Докажем, что любая точка X прямой (AB) лежит на прямой (CD). Точка X принадлежит некоторому отрезку d, содержащему точки A и B (рис. 400). Поскольку точка A лежит на прямой (CD), то она принадлежит некоторому отрезку a, содержащему точки C и D. Аналогично поскольку точка B лежит на прямой (CD), то она принадлежит некоторому отрезку b, содержащему точки C и D. Эти два отрезка a и b имеют две общие точки C и D. Согласно аксиоме I.6 объединением отрезков a и b является некоторый отрезок c. Этот отрезок c содержит как точки A и B, так и точки C и D. Отрезок d также содержит точки A и B. Следовательно, объединением отрезков c и d является некоторый отрезок e, который содержит точки X, A, B, C, D. Значит, точка X лежит на прямой (CD).

Точно так же доказывается, что любая точка прямой (CD) является точкой прямой (AB). Следовательно, прямые (AB) и (CD) совпадают.

Если за основной объект в аксиоматике планиметрии выбирается прямая, а не отрезок, то утверждение о том, что через каждые две точки проходит прямая, и притом только одна, принимается как аксиома.

Изучая в § 6—8 геометрию углов, мы использовали аксиомы Евклида о том, что суммы равных равны, половины равных равны и т. п. Эти аксиомы говорят об отношении равенства объектов любой природы. В нашей же аксиоматике основным отношением является лишь отношение равенства отрезков, с его помощью определяется отношение равенства углов, и тем самым лишь это отношение используется в аксиомах II—IV групп. Из четырех утверждений для отношения равенства углов, аналогичных аксиомам группы II о равенстве отрезков, лишь утверждение о возможности отложить угол, равный данному, формулируется как аксиома III.3. Остальные три таких утверждения могут быть доказаны. Дадим такие доказательства для двух из них.

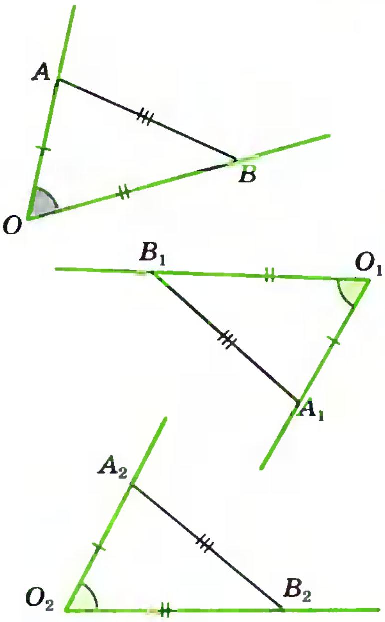


Рис. 401

Два угла, равные третьему углу, равны друг другу.

• **Доказательство.** Пусть $\angle O_1 = \angle O$ и $\angle O_2 = \angle O$ (рис. 401). Докажем, что $\angle O_1 = \angle O_2$. Так как $\angle O_1 = \angle O$, то у них найдутся равные соответственные хорды A_1B_1 и AB: $A_1B_1 = AB$. Построим хорду A_2B_2 угла O_2, соответственную хорде AB угла O. Для этого, применяя аксиому II.2, на сторонах угла O_2 отложим отрезки $O_2A_2 = OA$ и $O_2B_2 = OB$. Поскольку $\angle O_2 = \angle O$, то по аксиоме III.2 $A_2B_2 = AB$. Из равенств $A_1B_1 = AB$ и $A_2B_2 = AB$ следует, что $A_1B_1 = A_2B_2$. Итак, у углов O_1 и O_2 нашлись равные соответственные хорды A_1B_1 и A_2B_2. Поэтому $\angle O_1 = \angle O_2$.

Заметим теперь, что равенство треугольников определяется лишь равенством их соответственных сторон, что теорема о том, что у равных треугольников соответственные углы равны, непосредственно следует из определения равенства углов, а первый признак равенства треугольников — это простое следствие аксиомы III.2. Этими фактами мы можем пользоваться при доказательствах следующих теорем об углах:

Углы, смежные с равными углами, равны.

• **Доказательство.** Пусть угол ab с вершиной O равен углу a_1b_1 с вершиной O_1, а углы ac и a_1c_1 — смежные с ними углы (рис. 402). Отложим на сторонах этих углов соответственно равные друг другу отрезки OA и O_1A_1, OB и O_1B_1, OC и O_1C_1. Так как $\angle O_1 = \angle O$, то $\triangle O_1A_1B_1 = \triangle OAB$. Поэтому $A_1B_1 = AB$ и $\angle A_1B_1O_1 = \angle ABO$. Рассмотрим треугольники ABC и $A_1B_1C_1$. Эти треугольники равны по первому признаку, так как $AB = A_1B_1$, $BC = B_1C_1$ (как суммы равных отрезков BO, OC и B_1O_1, O_1C_1) и $\angle B = \angle B_1$. Поэтому $AC = A_1C_1$. Тогда $\triangle OCA = \triangle O_1C_1A_1$ (по трем сторонам). Следовательно, $\angle AOC = \angle A_1O_1C_1$.

Углы, составленные из равных углов, равны.

Дано: $\angle ab = \angle ac + \angle cb$, $\angle a_1b_1 = \angle a_1c_1 + \angle c_1b_1$, $\angle ac = \angle a_1c_1$ и $\angle cb = \angle c_1b_1$ (рис. 403, а).

Доказать: $\angle ab = \angle a_1b_1$.

• **Доказательство.** Рассмотрим случай, когда угол ab меньше развернутого. Пусть точка O — вершина угла ab, а точка O_1 — вершина угла a_1b_1. Возьмем на луче a точку A, на луче b точку B (отличные от O) и проведем хорду AB угла ab (рис. 403, б). Хорда AB пересекается с лучом c в некоторой точке C. Построим хорду A_1C_1 угла a_1c_1, соответственную хорде AC угла ac. От равных углов ac и a_1c_1 соответственные хорды AC и A_1C_1 отсекают равные треугольники OAC и $O_1A_1C_1$. Поэтому $\angle ACO = \angle A_1C_1O_1$. Продолжим отрезок A_1C_1 за точку C_1 на отрезок C_1B_1, равный отрезку CB, и проведем луч O_1B_1 (рис. 403, в). В треугольниках OCB и $O_1C_1B_1$ углы при вершинах C и C_1 равны как смежные с равными углами ACO и $A_1C_1O_1$. Заключающие эти углы стороны треугольников OCB и $O_1C_1B_1$ также равны (по построению). Поэтому $\triangle OCB = \triangle O_1C_1B_1$, $\angle COB = \angle C_1O_1B_1$ и $OB = O_1B_1$. Но угол COB — это угол cb. Значит, от луча c_1 в одну сторону отложены углы c_1b_1

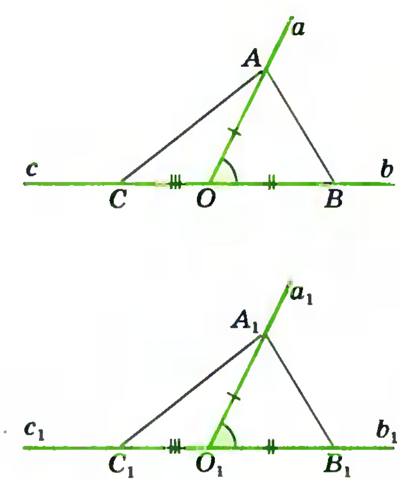


Рис. 402

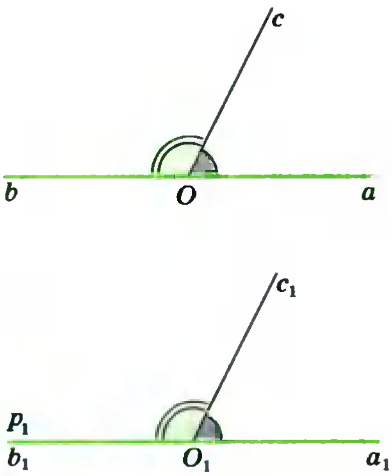


Рис. 404

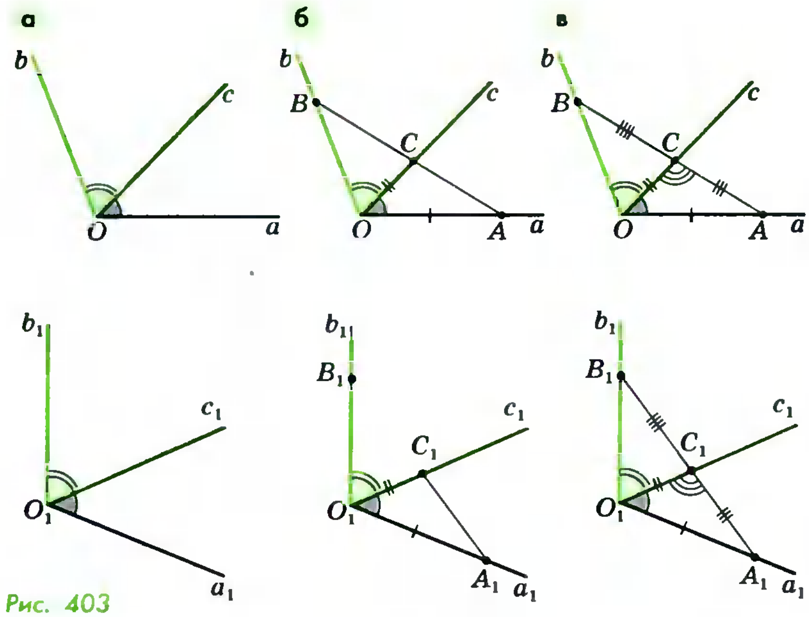


Рис. 403

и $C_1O_1B_1$, равные углу cb. Согласно утверждению единственности в аксиоме III.3 луч O_1B_1 совпадает с лучом b, и поэтому отрезок A_1B_1 является хордой угла ab. Так как $OA=O_1A_1$ и $OB=O_1B_1$, то AB и A_1B_1 — соответственные хорды углов ab и a_1b_1. Эти соответственные хорды равны (по построению), а потому $\angle ab=\angle a_1b_1$ (для случая, когда угол ab меньше развернутого).

Если угол ab развернутый, то требуется доказать, что угол a_1b_1 также развернутый (рис. 404). Пусть луч p — дополнительный к лучу a_1. Так как углы, смежные с равными углами, равны, то $\angle cb=\angle c_1p$. Но тогда от луча c_1 отложены в одну сторону углы c_1b_1 и c_1p, равные углу cb. Согласно утверждению единственности в аксиоме III.3 лучи b_1 и p совпадают. Поэтому угол a_1b_1 развернутый, а тогда $\angle ab=\angle a_1b_1$.

Утверждение об углах, аналогичное аксиоме Архимеда для отрезков, сводится к аксиоме Архимеда для отрезков.

Докажем еще теорему о том, что **все прямые углы равны друг другу.**

• **Доказательство.** Рассмотрим два прямых угла: угол ab с вершиной O и угол hk с вершиной O_1. Они равны смежным с ними углам: $\angle ab=\angle bc$ и $\angle hk=\angle kl$ (рис. 405). Допустим, что $\angle ab\neq\angle hk$. Отложим угол ap, равный углу hk, от луча a в ту сторону, где лежит луч b. Поскольку мы допустили, что $\angle ab\neq\angle hk$, то луч p не совпадет с лучом b. Пусть луч p лежит внутри угла ab. Тогда $\angle ap<\angle ab<\angle pc$. Так как углы, смежные с равными углами, равны, то $\angle pc=\angle kl$. А тогда мы приходим к таким соотношениям: $\angle hk=\angle ap<\angle ab<\angle pc=\angle kl$, т. е. $\angle hk<\angle kl$. Но это противоречит равенству $\angle hk=\angle kl$. Противоречие возникло из-за допущения, что $\angle ab\neq\angle hk$. Следовательно, $\angle ab=\angle hk$.

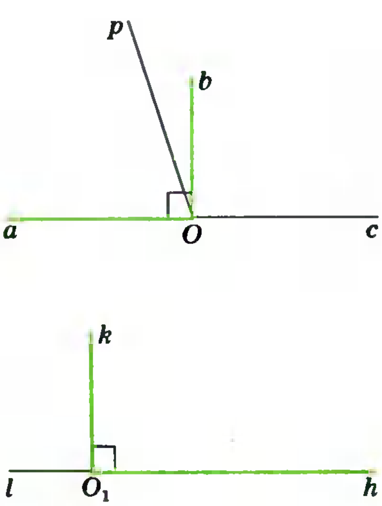


Рис. 405

Ответы

Задачи к § 2

2.12. а) 8 и 12; б) 4 и 6; в) 5 и 8. 2.15. 1, 2 или 3.

Задачи к § 3

3.13. 4, 8 или 12.

Задачи к § 4

4.3. 24 мм. 4.4. 48 мм, 16 мм, 48 мм, 8 мм. 4.7. а) 2 см или 6 см; б) 2 см или 10 см. 4.9. а) Отрезок; б) отрезок; в) два луча; г) два луча. 4.10. а) 745 мм; б) 5,42 м; в) 3,63 км. 4.11. а) 4 дм; б) 136 мм. 4.12. д) $8+4x$; е) $4+8x$. 4.14. а) 21 м; 16 м; 2 м; б) 300. 4.17. а) 70 см; б) 90 см; в) 150 см. 4.18. а) 15 см; б) 20 см.

Задачи к § 5

5.4. а) Сектор; б) полукруг (сектор или сегмент); в) круг. 5.5. а), б) Окружность. 5.9. а) Круг; б) прямоугольник и два полукруга; в) больше чем 25 м.

Задачи к § 6

6.9. Луч, полуплоскость. 6.10. а) Нет; б) нет; в) да. 6.15. 12. 6.16. 24.

Задачи к § 7

7.4. а) Нет; б) нет. 7.11. а) Развернутый; б) любой по форме; в) больший развернутого. 7.14. 7. 7.16. То, что углы вертикальные, следует из утверждения в). 7.25. **Указание.** Сначала удвойте данный отрезок так, чтобы перпендикуляр надо было провести в середине полученного отрезка.

Задачи к § 8

8.2. а) 20°; б) 80°; в) 20°, 120°. 8.3. а) 10°, 90°; б) 10°, 70°. 8.4. а) 20°; б) 140°. 8.5. а) 6°; б) в 13.00 угол в 30°. 8.7. 6. 8.8. 12.

Задачи к I главе

I.1. а) 9 см; б) 1 см; г) 4 см; д) уменьшается; е) уменьшается. I.2. а) 6 см; в) 7 см. I.3. а) 4 см; в) 5 см. I.4. $\frac{d}{2}$. I.7. а) 90°; б) 10°; г) 50°; д) уменьшается; е) уменьшается. I.8. а) 60°; в) 70°; г) **Указание.** Рассмотрите разные начальные положения луча c. I.9. а) 40°; в) 50°. I.12. а) Меньше; б) равна. I.13. 16.

Задачи к § 9

9.10. а) Нет; б) нет.

Задачи к § 12

12.8. а) 5 м. 12.9. а) 3 м. 12.19. 1, 2, 3, 6.

Задачи к § 13

13.11. а) 4; б) 6.

Задачи к § 14

14.5. ж), з) φ, $180° - \varphi$.

Задачи к § 15

15.4. а) 30°, 60°, 90°. 15.6. а) 30°, 60°, 90°; б) 20°, 40°, 120°; в) 45°, 60°, 75°; г) 15°, 60°, 105°. 15.8. а) 50° и 80°; б) 80° и 20°; в) 45° и 90°; г) 80° и 20°. 15.9. а) 70°; б) 75°; в) 80°; г) 72°; д) 120°; е) 80°; ж) 72°; з) 92°; и) 80°. 15.12. а) 80°; б) 10°;

в) $90^\circ - \frac{\varphi}{2}$. **Указание.** Для решения обратной задачи рассмотрите эту формулу. 15.14. **Указание.** Составьте для углов треугольника α, β, γ такое неравенство: $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$. Затем оцените эти углы, исходя из того, что их сумма равна 180°. 15.15. а) Прямой; б) тупой; в) острый. 15.16. а) 4; б) 3; в) 3. 15.17. б) **Указание.** Составьте для непрямых углов четырехугольника α, β, γ такое неравенство: $\alpha \geqslant \beta \geqslant \gamma$. Затем оцените эти углы, исходя из того, что их сумма равна 270°. 15.18. Нет. 15.20. а) 45° и 45°; б) 30° и 60°; в) 15° и 75°; г) 36° и 54°. 15.21. а) 44°; б) 90°; в) 90°; г) 60°; д) 90°; е) 36°; ж) 105°; з) 110°; и) 20°; л) 80°; м) 15°.

Задачи к III главе

III.1. а) 4, 6, 7; б) наибольшее число — 11, наименьшее число — 5. III.4. 75° или 15°. В общем случае $\varphi_1 + \varphi_2$ или $|\varphi_1 - \varphi_2|$. III.5. а) Прямоугольный; б) остроугольный; в) тупоугольный. Нет. III.8. г) **Указание.** Учтите, что эти высоты могут располагаться и вне треугольника.

Задачи к § 16

16.1. **Указание.** Выберите точку внутри многоугольника. Соедините ее со всеми вершинами многоугольника. 16.3. Всего диагоналей 5 и $\frac{(n-3)n}{2}$.

Задачи к § 17

17.3. а) 4140 мм^2; б) 1,95 м^2; в) 190 га. 17.4. а) В 4 раза; в) в 10 раз. 17.5. а) Увеличилась в 2 раза; б) уменьшилась в 5 раз; д) уменьшить в 3 раза. 17.6. а) Увеличилась в 6 раз; б) увеличилась в полтора раза; в) уменьшится в 2,25 раза. 17.9. а) 52 и 24; б) $2(ab+bc+ac)$ и abc. 17.10. а) В 3 раза; б) в 9 раз; в) в 27 раз. 17.11. а) Площадь увеличилась на 54 м^2; б) площадь увеличилась на 594 м^2; в) можно.

Задачи к § 18

18.6. а) 77,5 см^2; б) 15 660 см^2. 18.7. а) 1) Увеличилась в 2 раза; а) 2) уменьшилась в 3 раза; в) уменьшить в 10 раз. 18.8. а) $\frac{1}{4}$; б) $\frac{3}{4}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{1}{2}$; д) $\frac{1}{4}$; е) $\frac{1}{4}$; ж) $\frac{1}{4}$; з) $\frac{1}{4}$. 18.9. а) 960 см^2; б) 138 000 м^2. 18.10. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{3}$; в) $\frac{1}{6}$; г) $\frac{1}{9}$; д) $\frac{1}{9}$; е) $\frac{1}{6}$; ж) $\frac{2}{9}$; з) $\frac{1}{3}$. 18.14. **Указание.** Продолжите до пересечения боковые стороны трапеции. 18.15. а) 2 см^2; б) 7200 см^2. 18.16. 2. 18.19. $\frac{a^2}{2}$.

Задачи к § 19

19.3. а) 352 мм. 19.4. а) 20° и 160°; б) 100° и 80°; в) 120° и 60°; г) 45° и 135°. 19.7. б) На рисунке получится два равнобедренных треугольника. 19.14. **Указание.** Вычислите сумму двух соседних углов. 19.16. а) 4,48 см^2; б) 2451,2 см^2. 19.17. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{9}$; г) $\frac{1}{4}$. 19.30. а) В 4 раза; б) на диагонали отложите сторону квадрата. 19.33. а) 4; б) 5.

Задачи к IV главе

IV.1. а) $1-\left(\frac{x}{2}\right)$; б) $1-x$; в) $1-x$; г) $1-\left(\frac{x^2}{2}\right)$; д) $\frac{1}{2}$; е) $1-x^2$; ж) $2x(1-x)$; з) $\frac{(x^2+1)}{2}$; и) $-x^2+x+0{,}5$. IV.3. а) Когда $XA \perp AB$; б) $0{,}5ab$; IV.5. **Указания.** а) Пусть в трапеции $ABCD$ точка O — точка пересечения диагоналей. Доказать, что углы при сторонах AD и BC в треугольниках AOD и BOC равны. б) Воспользоваться характерным свойством серединного перпендикуляра. в) Доказать равенство (или равновеликость) треугольников AOB и COD. г) Воспользоваться тем, что средняя линия трапеции делит пополам любой отрезок с концами на основаниях трапеции. IV.6. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $\frac{3}{8}$; д) $\frac{1}{2}$. IV.7. **Указание.** Рассмотреть разные случаи расположения точки M относительно прямоугольника. IV.8. а) Параллелограмм; б) трапеция; в) трапеция; г) параллелограмм; д) прямоугольник; е) прямоугольник; ж) трапеция; з) трапеция; и) квадрат. IV.9. Больше в 2 раза.

Задачи к § 20

20.2. 12. 20.4. а) 25; б) 5. 20.5. а) 10; б) 0,5; в) $\sqrt{5}$; г) $\sqrt{61}$. 20.6. а) 0,5; б) 2,0. 20.7. а) $\sqrt{6}$; б) $\sqrt{3}$; в) 2; г) $\sqrt{2}$; д) $\sqrt{12}$; е) $\sqrt{13}$; ж) $\sqrt{6}$; з) $\sqrt{7}$; и) $\sqrt{6}-1$. 20.8. а) $\sqrt{8}$; б) $\sqrt{3}$; в) 0,25; г) $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 20.12. а) 5. 20.14. При $a>b$ высота равна $\sqrt{c^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2}$, диагональ равна $\sqrt{c^2+ab}$. 20.15. б) $a^2\sqrt{3}$. 20.16. б) $0{,}5a^2\sqrt{3}+3ab$. 20.17. б) $0{,}75a\sqrt{4b^2-a^2}+a^2\frac{\sqrt{3}}{4}$. 20.18. б) $a^2+a\sqrt{4b^2-a^2}$. 20.19. $a^2\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{3a^2}{2}$. 20.20. $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$.

Задачи к § 21

21.7. Две прямые, параллельные данной. 21.11. а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sqrt{0{,}99}$. 21.12. а) $\sqrt{14}$; б) $\sqrt{8}$; в) $\sqrt{30}$; г) $\sqrt{6}$; д) 0,25; е) $\sqrt{6}-1$. 21.14. а) $\sqrt{2}$; б) $\sqrt{13}$. 21.16. а) $x=\sqrt{5}$, $y=2$, $z=2\sqrt{5}$; б) $x=\frac{1}{2}$, $y=\frac{\sqrt{5}}{2}$, $z=\sqrt{5}$; в) $x=2{,}5$, $y=\sqrt{5}$, $z=2{,}5\sqrt{5}$; г) $x=\frac{9}{5}$, $y=\frac{16}{5}$, $z=\frac{12}{5}$; д) $x=\frac{9}{4}$, $y=\sqrt{7}$, $z=0{,}75\sqrt{7}$; е) $x=\sqrt{3}$, $y=\frac{\sqrt{3}}{3}$, $z=\frac{2\sqrt{3}}{3}$. 21.20. От 1 до 5. 21.25. а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\sqrt{8}$ и $\frac{2\sqrt{8}}{3}$; в) $\frac{\sqrt{11}}{2}$ и $\frac{5\sqrt{11}}{6}$, г) 2, 3 и $\frac{6\sqrt{13}}{13}$; д) $\frac{5\sqrt{7}}{4}$, $\frac{3\sqrt{7}}{2}$, $\frac{15\sqrt{7}}{8}$. 21.26. 5 см. 21.28. а) 1 и 3; б) 1 и 3. 21.29. а) От 1 до 3; б) от 0 до 3. 21.30. а) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; б) $\sqrt{2}$ и 1; в) $\sqrt{2}$ и 1. 21.32. а) 2; б) 3; в) 2, 1, $\sqrt{5}$ и $\sqrt{13}$. 21.34. Две пересекающиеся прямые. 21.35. а) 2 см; б) 4 см; в) 0 или 6 см; г) 1 см или 7 см. 21.42. $\frac{a}{\sqrt{2}}$ и 45°. 21.43. $\sqrt{13}$. 21.45. $\frac{a}{\sqrt{\frac{2}{3}}}$.

Задачи к § 22

22.2. а) $\frac{4}{3}$; б) $\frac{4}{3}$; в) 2; г) 4; д) 3; е) 3; ж) $\sqrt{5}$; з) $\frac{10}{\sqrt{3}}-1$; и) $6-\sqrt{5}$. 22.3. а) $y=\frac{5x}{3}$; б) $y=\frac{x}{2}$; в) $y=\frac{3}{x}$; г) $y=\frac{x+1}{x}$; д) $y=\sqrt{x^2+1}$; е) $y=2x-\sqrt{x^2-1}$. 22.6. Синусы острых углов: а) $\frac{2}{3}$ и $\frac{\sqrt{5}}{3}$; б) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ и $2\frac{\sqrt{5}}{5}$; в) $\frac{3}{5}$ и $\frac{4}{5}$; г) $2\frac{\sqrt{2}}{3}$ и $4\frac{\sqrt{2}}{9}$; д) $\frac{\sqrt{7}}{4}$ и $3\frac{\sqrt{7}}{8}$. 22.7. $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 22.9. $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 0,5 и 1. 22.10. $\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, 1. 22.11. $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 0,5 и 1. 22.12. $\frac{3}{5}$ и $\frac{4}{5}$. 22.15. а) 0,5; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $\frac{\sqrt{2}}{2}$. 22.16. а) sin 35°, sin 40°, sin 45°; б) sin 145°, sin 140°, sin 135°; в) sin 35°, sin 50°, sin 120°; г) sin 120°, sin 62°, sin 115°. 22.17. а) Нет; б) да. 22.19. а) Первая; б) первая.

Задачи к § 23

23.9. а) 7,7; 9,2; б) 6,0; 1,9; в) 1,7; 1,4; г) 2,7; 1,6. 23.10. 0,4 км. 23.11. $d\sin\alpha$. 23.12. **Указание.** Рассмотрите движение от точки A в разные стороны. Учтите, что возможны разные соотношения между d и d_1. 23.13. а) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; б) 0,25; в) 0,25; г) $3\frac{\sqrt{3}}{2}$. 23.14. б) $\sin\alpha=\frac{2S}{d^2}$; в) $d=\sqrt{\frac{2S}{\sin\alpha}}$. 23.15. а) 2 : 3; б) 8 : 3; в) 2 : 1;

г) $2:3$; д) $1:2$; е) $1:4$. 23.16 в) От 0 до ab. 23.17 **Указание.** б) Запишите площади четырех треугольников, образовавшихся в четырехугольнике. 23.18 а) $d=\sqrt{\frac{S}{\sin\alpha}}$; б) $\sin\alpha=\frac{S}{d^2}$; г) от 0 до d^2. 23.21 а) $b:a=1:\sqrt{3}$, $c:a=1:\sqrt{3}$; б) $b:a=1:2$, $c:a=\sqrt{3}:2$; в) $b:a=0{,}5$, $c:a=0{,}5$. 23.22 4 ч. 23.25 а) 12,8; 13,3; б) 0,4; 2,1; в) 14°, 136°, 28. 23.26 а) 145°, 25°, 7,3; б) 35°, 135°, 12,3; в) 3°, 167°, 13. 23.27 а) $\sqrt{3}$; б) $1:\sqrt{3}$. 23.31 $\approx 35°$. 23.32 $\approx 23°$, 31°, 50°. 23.33 $\approx 54°$. 23.34 $\approx 70°$. 23.35 $\approx 54°$. 23.36 $2a^2\sin\varphi + 4a^2\sin^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$.

Задачи к § 24

24.2. е) От 0 до d. 24.5 а) $\frac{2}{3}$ и $\frac{\sqrt{5}}{3}$; б) $\frac{\sqrt{5}}{5}$ и $2\frac{\sqrt{5}}{5}$; в) $\frac{3}{5}$ и $\frac{4}{5}$; г) $\frac{1}{3}$ и $\frac{7}{9}$; д) $\frac{3}{4}$ и $-\frac{1}{8}$. 24.7 а) $2\sqrt{2}:3$, $\sqrt{21}:5$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$; б) $\pm 2\sqrt{2}:3$, $\pm\sqrt{7}:3$, $\pm\sqrt{0{,}99}$. 24.8 а) Нет; б) нет; в) да. 24.10 а) 0,5; $\sqrt{3}:2$; б) $1:\sqrt{5}$, $2:\sqrt{5}$; в) 0,5; $\sqrt{3}:2$. 24.12 а) $\sqrt{3}:2$; б) $\frac{1}{2}$; в) $\sqrt{2}:2$. 24.16 а) 70°; б) 60°; в) 26°; г) 0°. 24.18 а) 1,1; б) $\sqrt{2}$; в) 2. 24.19 а) 0,5; б) 0,5; в) 0,75; г) 0,75; д) $\sqrt{3}:4$. 24.20 а) cos 45°, cos 40°, cos 35°; б) cos 145°, cos 140°, cos 135°; в) cos 120°, cos 50°, cos 35°; г) cos 120°, cos 115°, cos 62°. 24.24 Один из углов имеет косинус, равный $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$. 24.25 Один из углов имеет косинус, равный $\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Задачи к § 25

25.3. $\sqrt{3}$. 25.6 а) $AC=\sqrt{7}$, $\angle A=79°$; б) $BC=6{,}5$, $\angle B=20°$; в) $AB=1{,}4$, $\angle A=126°$; г) $\angle A=5°$, $\angle C=14°$, $AB=0{,}5$; д) $\angle A=41°$, $\angle B=56°$; е) $\angle A=39°$, $\angle B=\angle C=70°30'$; ж) $\angle C=90°$, $\angle A=67°$, $\angle B=23°$; з) $\angle C=90°$, $\angle A=37°$, $\angle B=53°$. 25.7 а) 35°; б) 65°. 25.8 а) Остроугольный; б) тупоугольный; в) остроугольный; г) прямоугольный. 25.9 а) 3) По теореме косинусов найдите угол B и угол C. Затем найдите половину угла C, а потом используйте теорему синусов. а) 4) Сначала по теореме косинусов найдите угол B, а затем из прямоугольного треугольника найдите высоту. 25.10 а) 5,1; б) 3,4. 25.13 в) 0,25. 25.18 а) 4) Треугольник может быть любого вида; б) прямоугольный. 25.23 4.

Задачи к § 26

26.7. **Указание.** Можно воспользоваться результатами задач 22.6 и 24.5. 26.9 а) $\angle A=35°$; б) $b=0{,}27$; в) $b=1280$; г) $a=11$; д) $a=0{,}11$. 26.11 $AC=\frac{h}{\operatorname{tg}A}+\frac{h}{\operatorname{tg}C}$. 26.13 а) 45°; б) 34°. 26.14 45°. 26.17 **Указание.** Проведите высоты трапеции на большее основание. 26.18 **Указание.** б) Проведите среднюю линию прямоугольника и найдите сначала половину искомого угла. г) Сначала найдите высоту трапеции. 26.21 а) 30°, 40°, 50°; б) 100°, 70°, 80°; в) 110°, 120°, 60°; г) 130°, 140°, 160°. 26.22 а) Да; б) да.

Задачи к V главе

V.1 д) **Указание.** Используйте то, что медиана, проведенная на гипотенузу прямоугольного треугольника, равна половине этой гипотенузы. V.2 д) **Указание.** Рассмотрите треугольник, образованный боковой стороной, половиной другой боковой стороны и данной медианой. Его площадь составляет половину искомой площади. V.3 **Указание.** б) Найдите сначала стороны, к которым проведены высоты. в) Решение аналогично V 2д. г) По теореме синусов найдите еще одну сторону. V.4. **Указание.** Составьте систему уравнений, в которой неизвестны стороны прямоугольника, а известны диагональ и периметр. V.5 **Указание.** в) Сначала найдите угол между диагональю и стороной. е) Сначала найдите площадь одного из четырех треугольников, на которые диагонали делят ромб. V.6. **Указание.** г) Пусть $ABCD$ — данная трапеция с большим основанием AD. Проведите высоту трапеции BK. Сначала найдите угол между диагональю и большим основанием, затем DK, потом BC. д) Пусть $ABCD$ — данная трапеция с большим основанием AD. Проведите две высоты на большее основание BK и CL. Затем найдите AK, потом AL, далее CL. е) Сначала решите треугольник, стороны которого — большее основание трапеции, ее боковая сторона и диагональ. V.7. **Указание.** в) Пусть $ABCD$ — данная трапеция с большим основанием AD. Проведите $BK \| AC$ (точка $K \in AD$) и найдите высоту треугольника BKD. г) Пусть $ABCD$ — данная трапеция с большим основанием AD. Проведите BK параллельно CB до пересечения с AD и решите сначала треугольник ABK. V.8. г) **Указание.** Угол между высотами параллелограмма, проведенными из одной его вершины, равен углу между непараллельными его сторонами. V.9. а) Нет; б) нет. V.10. **Указание.** б) Нарисуйте схему движения туриста. Один из углов в полученных треугольниках равен 45°. в) Нарисуйте схему движения туриста. Пусть A — начальная точка движения, B, C, D — точки его поворота. Нарисуйте прямоугольник, в который вписан четырехугольник $ABCD$, стороны которого идут в направлении с севера на юг и с запада на восток.

Задачи к § 28

28.7. $100\sqrt{13+6\sqrt{2}}$. 28.14. б) $v_1 = v_2$; в) $\operatorname{tg} \varphi = \frac{v_1}{v_2}$; г) $\sqrt{v_1^2 + v_2^2}$. 28.17. $\vec{0}$. 28.28. а) $\vec{x} = \vec{b} - \vec{a}$; б) $\vec{x} = \vec{a} - \vec{b}$; в) $\vec{x} = \vec{a} + \vec{b}$; г) $\vec{x} = -\vec{a}$. 28.34. а) Да; б) да.

Задачи к § 29

29.5. а) $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$; б) $\overrightarrow{AB} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{CA}$; в) $\overrightarrow{BC} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$. 29.6. а) $\overrightarrow{PX} = \frac{2}{3}\overrightarrow{PQ}$; б) $\overrightarrow{QX} = \frac{1}{2}\overrightarrow{XP}$; в) $\overrightarrow{PQ} = -3\overrightarrow{QX}$. 29.7. а) $\overrightarrow{AT} = t\overrightarrow{TB}$; б) $\overrightarrow{AT} = \frac{t}{t+1}\overrightarrow{AB}$; в) $\overrightarrow{TB} = \frac{1}{t+1}\overrightarrow{AB}$; г) $\overrightarrow{TA} = -t\overrightarrow{TB}$. 29.8. а) Отрезок; б) отрезок; в) луч; г) луч; д) луч; е) отрезок.

Задачи к § 30

30.2. а) 60° и 120°; б) 45° и 135°; в) 50°, 80° и 130°; г) 70°, 125° и 110°. 30.5. а) 80°; б) 140°. 30.9. а) $\overrightarrow{AB} = (1, 0)$; б) $\overrightarrow{BC} = (-3, -1)$; в) $\overrightarrow{CD} = (-4, -3)$; г) $\overrightarrow{DA} = (6, 4)$. 30.11. а) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; б) $\frac{\sqrt{2}}{2}$; в) $\frac{1}{2}$; г) $-\frac{1}{2}$; д) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; е) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$. 30.12. а) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; б) $\sqrt{2}$. 30.13. а) 120°; б) 90°; в) 30°; г) 0°. 30.14. $\overrightarrow{BK} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$. 30.15. а) $-\frac{1}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$; г) 0; д) $-\frac{1}{4}$; е) $\frac{3}{4}$. 30.16. а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{1}{2}$; в) $-\frac{3}{4}$. 30.17. а) −4; б) 1; в) 2; г) 7,5; д) −16. 30.18. д) $\frac{\sqrt{3}}{4} + 3$; е) $-\sqrt{3} - \frac{\sqrt{2}}{4}$. 30.19. а) 1; б) 1; в) −1; г) −1; д) 2; е) −0,5.

Задачи к § 31

31.2. а) $\sqrt{35} : 2$; б) $2\sqrt{2}$; в) $3\sqrt{3} : 2$. 31.3. **Указание.** Ответы получаются по формулам $x = 2\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ для длины хорды и $y = \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$ для расстояния от этой хорды до центра. в) 1. 31.4. $\sqrt{3}$, (0, 2). 31.8. $\sqrt{5}$. 31.9. а) 140°; б) 90°; в) 30°. 31.10. а) $\sin\left(\frac{\varphi}{2}\right) = \frac{R}{AO}$,

$BC = 2R\cos\left(\frac{\varphi}{2}\right)$. 31.12. а) 25°; б) 45°; в) 65°. 31.13. а) $2-\sqrt{3}$. 31.17. а) 60°, 80° и 220°; б) 120°; в) 160°, 180° и 20°; г) 30° и 300°. 31.18. а) 130°; б) 80°. 31.22. а) 30° или 150°; б) 45° или 135°; в) 60° или 120°.

Задачи к § 32

32.2. а) 1, 1, $\sqrt{3}$; б) $2\sqrt{3}$, 2, 2. 32.4. а) $\sqrt{3}$; б) $\frac{1}{\sqrt{3}}$. 32.5. а) $\frac{9}{8}\sqrt{2}$; б) 1; в) 2; г) $\frac{\sqrt{S}}{\sin 2\varphi\sqrt{\operatorname{tg}\varphi}}$. 32.6. а) $\frac{\sqrt{3}}{4}$; б) 1; в) $0{,}5 \pm \frac{\sqrt{3}}{4}$. 32.7. а) 5; б) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; в) $\frac{\sqrt{13}}{\sqrt{3}}$. 32.10. а) $\frac{\sqrt{3}}{6}$; б) $2\sqrt{3}$. 32.11. **Указание.** Обозначьте острый угол как φ, гипотенузу как c и выразите все данные через эти величины. 32.12. а) $\frac{\sqrt{15}}{10}$.

Задачи к § 33

33.3. **Указание.** Опишите окружность около данного многоугольника. 33.6. а) 30°; б) 60°; в) $\frac{2}{\sqrt{3}}$; г) 3 : 1; д) 1 : 2; е) 2 : 1. 33.7. $\sqrt{3}$, $\sqrt{2}$, 1. 33.8. $1 : \sqrt{3}$, $1 : \sqrt{2}$, 1. 33.9. $2\sqrt{3}$, 2, $2 : \sqrt{3}$. 33.10. $1 : 2\sqrt{3}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$. 33.11. $nR^2\sin\left(\frac{180^\circ}{n}\right)\cos\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$, $nr^2\operatorname{tg}\left(\frac{180^\circ}{n}\right)$. 33.12. $b = a\sqrt{\dfrac{1-\cos\frac{180^\circ}{n}}{1-\cos\frac{360^\circ}{n}}}$.

Задачи к § 34

34.2. а) 0,5; б) $1 : \sqrt{2}$. 34.3. а) $\pi\sqrt{a^2+b^2}$; б) $\frac{\pi a}{\sin\varphi}$; в) $\frac{\pi a}{\cos\left(\frac{\varphi}{12}\right)}$; г) $\frac{\pi a}{\sin\left(\frac{\varphi}{12}\right)}$. 34.4. $\frac{\pi}{(1+\sqrt{2})}$. **Указание.** Находите r из формулы $S = \frac{1}{2}Pr$ (п. 32.4.). 34.6. **Указание.** в) Рассмотрите возможное движение каждого колеса системы, если первое из них стало вращаться. 34.8. ж) $L = \frac{2\pi\varphi}{360}$. 34.9. $\varphi = 360\left(\frac{2\pi}{L}\right)$. 34.10. а) $\frac{\pi R}{3}$ и $\frac{5\pi R}{3}$; б) $R\sqrt{3}$. 34.11. б) $\pi\sqrt{3}$. 34.14. Путь не зависит от выбора точек, которые разбивают данный отрезок на диаметры построенных полуокружностей. 34.17. а) $\frac{3}{4}$. 34.18. $r = \frac{R}{\sqrt{2}}$. 34.19. а) $\frac{\pi}{3}$; б) $\frac{\pi}{2}$; г) π. 34.20. а) $\frac{\pi}{12}$; б) $\frac{\pi}{(2+\sqrt{2})^2}$. 34.21. а) Круг; б) у квадрата.

Задачи к § 35

35.7. Наименьшее число 4, наибольшее число 8.

Задачи к VII главе

VII.1. Для прямого угла радиус наибольшего круга $6 - 4\sqrt{2}$. VII.2. в) **Указание.** Рассмотрите равнобедренный треугольник, в котором две стороны, равные 1, — это соседние стороны правильного пятиугольника, а еще одна его сторона — наименьшая диагональ этого пятиугольника. Этот треугольник разбит другой такой же диагональю пятиугольника на два треугольника. Все углы в этих двух треугольниках можно найти. VII.3. б) Увеличится в 4 раза, уменьшится в 9 раз; в) увеличилась в $\sqrt{2}$ раз, уменьшилась в $\sqrt{3}$ раз. VII.4. а) $\frac{9\sqrt{3}}{4}$. VII.5. **Указание.** Во всех задачах этого номера возможно получение только приближенного значения площади сегмента. VII.6. **Указание.** в) Докажите, что этот четырехугольник является трапецией. Найдите вначале все стороны и диагонали этой трапеции. VII.7. **Указание.** Сначала найдите радиус данного круга. VII.8. **Указание.** Рассмотрите два различных случая: когда вершины треугольника являются вершинами его основания и когда они таковыми не являются.

VII.9. $2\leqslant\frac{R}{r}<\infty$. VII.10. Треугольник является равносторонним.

VII.11. **Указание.** Раз круг дан, то значит известен его радиус. Окружность, описанная около трапеции, является описанной для любого треугольника, вершины которого являются вершинами данной трапеции.

Задачи к § 36

36.1. Прямоугольный. 36.2. а) $\sqrt{17}$; б) $\sqrt{5}$; в) $\sqrt{32}$; г) $\sqrt{5}$. 36.6. а) $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$, $y\leqslant -x+2$; б) $y\geqslant 0$, $y\leqslant -x+2$; $y\leqslant x+2$; в) $x\geqslant 0$, $y\leqslant -x+2$, $y\geqslant\frac{3}{2}x-3$; г) $y\leqslant -x+2$, $y\leqslant x+2$, $y\geqslant 1{,}5x-3$, $y\geqslant -1{,}5x-3$. 36.7. а) A, C — внутри круга, B — вне круга, D — на окружности; б) A, K, L — внутри круга, B, D — вне круга, C, E — на окружности. 36.8. а) $x^2+y^2=4$; б) $(x+2)^2+(y-1)^2=9$; в) $(x+3)^2+y^2=2$. 36.9. а) $(0,\ 0)$, $\sqrt{5}$; б) $(0,\ -5)$, 2; в) $(2,\ 0)$, $\sqrt{3}$; г) $(-5,\ 1)$, $\sqrt{2}$; д) $(-3,\ -1)$, 1; е) $(0,\ 0)$, $|a|$ при a, отличном от 0. 36.10. б), в) Да; а), г), д) нет. 36.12. а) $y=x+1$ или $y=x-1$; б) $y=x+1$ или $y=x-1$; в) $y=x+\sqrt{2}$ или $y=x-\sqrt{2}$. 36.13. а) $x=2$; б) $y=-1$. 36.14. а) $x^2+y^2+8x+12=0$; б) $x^2+y^2-4=0$; в) $x^2+y^2-4=0$. 36.15. а) $y=x^2+1$; б) $-y=x^2+1$; в) $x=y^2+1$; д) $x=-y^2-1$. 36.16. По отрезку. 36.17. Во всех случаях по лучу. 36.18. а) На отрезке; б) на ветке гиперболы. 36.19. а) По прямой; б) такой линии не существует.

Задачи к § 37

37.1. $(\cos\varphi,\ \sin\varphi)$. 37.2. а) 90°; б) 0°; в) 172°; г) 56°; д) 154°. 37.3. $(2,\ -4)$, $(9,\ 3)$, $(-2,\ -3)$, $(-2{,}5,\ \frac{1}{3})$. 37.4. а) $(1,\ 1)$; б) $(-1,\ 1)$; в) $(1,\ -1)$; г) $(-1,\ -1)$; д) $(-2,\ 3)$; е) $(0{,}5;\ -1{,}5)$. 37.5. а), б), д) Нет; в), г), е) да. 37.6. а) -6; б) -8; в) один из вариантов 8 и 0,5; г) один из вариантов 1 и -2. 37.7. а) $(-1,\ 1)$; б) $(t,\ -t)$, где $t\in R$. 37.8. а) $-15\vec{a}$; б) $8\vec{x}$; в) $-\vec{p}$; г) $2\vec{b}$; д) $2(\vec{a}-\vec{b})$; е) $\vec{a}$. 37.9. а) $\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})$; б) $\overrightarrow{BO}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{AB})$; в) $\overrightarrow{CO}=\frac{1}{2}(-\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD})$. 37.10. а) $\overrightarrow{AM}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$; б) $\overrightarrow{BK}=-\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}$; в) $\overrightarrow{CL}=-\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{a}$; г) $\frac{1}{2}\vec{a}$; д) $\frac{1}{2}\vec{a}$; е) $\vec{0}$. 37.11. а) $(1,\ -1)$; б) $(-2,\ 1)$; в) $(-2,\ 2)$; г) $(-2p,\ -2q)$. 37.12. а) $(1,\ 1)$; б) $(-1,\ 1)$. 37.13. а) $(-2,\ -4)$; б) $(-2,\ -4)$; в) $(-13,\ -26)$; г) $\left(\frac{-43}{6},\ \frac{19}{2}\right)$. 37.14. $(-1,\ 1)$. 37.15. а) $\sqrt{5}$; б) $\sqrt{13}$; в) $\sqrt{5}$; г) $3\sqrt{3}$; д) $4\sqrt{2}$; е) $0{,}5\sqrt{269}$; ж) $0{,}5\sqrt{277}$. 37.16. а) $\pm 0{,}5\sqrt{3}$; б) $\pm\sqrt{3}$; в) одна — да, две — нет. 37.17. **Указание.** Выразите векторы $\overrightarrow{KL}$ и $\overrightarrow{BC}$ через векторы $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$. 37.18. Рассмотрите рисунок как часть параллелограмма, построенного на векторах $\overrightarrow{OA}$ и $\overrightarrow{OB}$. 37.19. б) Для трапеции. 37.22. а) 1) $\frac{1}{2}$; 2) -3; 3) $-\frac{2}{3}$; 4) 1; 5) 0; 6) его нет; б) -1. 37.23. а) $y=\frac{x}{3}-\frac{1}{3}$; б) $y=-2x-5$; в) $y=-1$. 37.25. а) $y=-1$; б) $x=3$; в) $y=x-4$; г) $y=\frac{-x}{\sqrt{3}}+(\sqrt{3}-1)$; д) $y=x-4$; е) $y=\frac{-2x}{3}+1$; ж) $y=-x+2$. 37.27. $(3,\ -1,\ 9)$ и $(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{5}{2})$.

Задачи к § 38

38.2. а) Положительный; б) отрицательный. 38.3. а) $3\sqrt{2}$; б) 3; в) $-3\sqrt{2}$; г) $-3\sqrt{3}$; д) 0; е) 6; ж) −6. 38.5. а) 1; б) −1; в) 0; г) 1; д) 1; е) −1; ж) 0. 38.6. а) $\frac{1}{2}$; б) $-\frac{1}{2}$; в) $\frac{1}{2}$; г) 0; д) $-\frac{3}{8}$; е) 0. 38.8. а) 0; б) −17; в) 0. 38.9. б) $\pm\left(\frac{3}{\sqrt{13}}, \frac{-2}{\sqrt{13}}\right)$. 38.10. а) 8; б) −12; в) $-\frac{2}{3}$; г) 17; д) 26; е) 10; ж) −8. 38.11. а) 27; б) 14; в) −19. 38.13. а) $3\vec{a}^2+5\vec{a}\vec{b}-2\vec{b}^2$; б) $0{,}25\vec{a}^2-\vec{b}^2$; в) $\vec{a}^2-\vec{b}^2$. 38.14. а) $-\frac{1}{2}$; б) $-\frac{3\sqrt{3}}{2}$; в) 1; г) $4+2\sqrt{31}$. 38.15. а) 63°; б) 135°; в) 23°. 38.16. а) $\sqrt{41}$, $\sqrt{58}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{45}$; б) 105°, 22°. 38.18. **Указание.** Запишите это равенство как равенство скалярных квадратов векторов. Затем каждый из этих векторов представьте как разность двух векторов, начинающихся в точке пересечения прямых AC и BD.

Задачи к § 39

39.1. Когда $AB \parallel a$. 39.2. В общем случае нет. 39.3. а) Нет; б) да; в) нет. 39.4. В общем случае нет.

Задачи к § 40

40.2. в) $\sin\varphi$. 40.3. а) Площадь, заметаемая AB и BC; б) площадь, заметаемая AC; в) площадь, заметаемая AB. 40.6. б) 2. 40.10. а) 8, $\frac{3\sqrt{3}}{2}$; б) 9, $\frac{7\sqrt{3}}{4}$. 40.11. $48\pi+18\sqrt{3}$, $24\pi-18\sqrt{3}$, 16π, 8π. 40.13. а) Да; б) (1, 0); в) $\left(\frac{-6}{5}, 0\right)$. 40.15. 7,12. 40.16. $\frac{64\pi}{3}+8\sqrt{3}$, $\frac{32\pi}{3}$, $\frac{32\pi}{3}-8\sqrt{3}$, $\frac{16\pi}{3}$. 40.19. в) $S\,(1+2\sin 15°)$; г) $S\left(1+\frac{\sqrt{6}}{\cos 15°}\right)$.

Задачи к § 41

41.8. **Указание.** д) Рассмотрите поворот квадрата вокруг центра на 90°.

Задачи к § 42

42.1. а) $\frac{1}{k}$; б) k_1k_2. 42.3. а), б) Можно. 42.5. Такая же. 42.12. Аналогичная точка. 42.21. а) $\frac{ac}{b}$; б) $\frac{ac}{(a+b)}$; в) $\frac{a(b+c)}{b}$; г) $\frac{ab}{c}$; д) $\frac{ab}{c}$; е) $\frac{ac}{b}$. 42.22. $\frac{dp}{(p+q)}$. 42.43. $\frac{(pd_1+qd_2)}{(p+q)}$. 42.25. $\frac{1}{4}$. 42.26. а) 0,75; б) 1 : 9; в) 1 : 2; г) 1 : 4; д) 2 : 3; е) 1 : 2; ж) 1 : 2; з) 1 : 2. 42.32. а) 16 кв. мм; б) 4 кв. мм.

Тесты

Для итоговой проверки возможно использование нижеприведенных тестов. В каждом тесте содержится пять утверждений, на которые можно дать три вида ответов: положительный, если вы считаете это утверждение верным (кодируется знаком +), отрицательный, если вы считаете утверждение неверным (кодируется знаком —) и нейтральный, если вы не знаете, верное это утверждение или нет (кодируется знаком 0). За каждый правильный ответ ставится +1, за каждый неправильный ставится —1, за нейтральный ответ ставится 0. Таким образом, по каждому тесту можно набрать от +5 до −5 баллов.

Время на выполнение одного теста планируется учителем.

Во время выполнения теста можно делать любые записи по решению, которые можно не сдавать учителю.

Тест 1. Взаимное положение прямых

Две прямые пересекаются, если они:

1) лежат в одной плоскости и пересекают третью прямую в разных точках;
2) лежат в одной плоскости и пересекают третью прямую под разными углами;
3) симметричны между собой относительно третьей прямой;
4) каждая из них — касательная к данной окружности;
5) каждая из них проходит через одну из вершин тетраэдра и точку пересечения медиан противоположной грани.

Тест 2. Взаимное положение прямых

Две прямые параллельны, если они:

1) параллельны третьей прямой;
2) перпендикулярны одной и той же прямой и лежат в одной плоскости;
3) перпендикулярны одной и той же прямой и не лежат в одной плоскости;
4) перпендикулярны одной и той же плоскости;
5) лежат в параллельных плоскостях.

Тест 3. Параллельность прямых

Две прямые параллельны, если:

1) каждая из них перпендикулярна одной и той же прямой;
2) обе они параллельны одной и той же плоскости;
3) они равноудалены от одной и той же прямой;
4) лежат в одной плоскости и с одной и той же плоскостью они образуют равные углы;
5) одна из них пересекает две грани тетраэдра, а другая пересекает остальные грани тетраэдра. При этом точки пересечения лежат внутри граней.

Тест 4. Разбиение на части

Можно разбить на три части:

1) плоскость тремя прямыми;
2) плоскость двумя окружностями;

3) четырехугольник одной прямой;
4) пространство двумя плоскостями;
5) сферу двумя пересекающимися плоскостями.

Тест 5. Равенство отрезков

Два отрезка равны, если они:
1) являются диагоналями равнобокой трапеции;
2) являются медианами равнобедренного треугольника;
3) являются высотами параллелограмма;
4) центрально-симметричны;
5) являются диаметрами двух параллелей одной и той же сферы.

Тест 6. Сравнение отрезков

Отрезок a больше отрезка b, если:
1) a — медиана, b — высота, проведенная из одной и той же вершины треугольника;
2) a — большая диагональ параллелограмма, b — его сторона;
3) a — большее основание равнобокой трапеции, b — ее диагональ;
4) a — диаметр, b — хорда одного и того же круга;
5) a — диагональ прямоугольного параллелепипеда, b — диагональ его грани.

Тест 7. Длина отрезка

Длина отрезка равна 1, если он является:
1) высотой равностороннего треугольника со стороной 2;
2) третьей стороной треугольника, в котором две другие стороны равны 1 и 2;
3) большей диагональю ромба со стороной 1;
4) стороной правильного шестиугольника, описанного около окружности радиуса 1;
5) радиусом круга, площадь которого равна 4.

Тест 8. Длина отрезка

AB — отрезок. Он больше 1, если он является:
1) диагональю квадрата со стороной, меньшей 1;
2) стороной треугольника, в котором каждая из двух других сторон меньше, чем 0,5;
3) высотой правильного тетраэдра с ребром, большим, чем 2;
4) диаметром шара, у которого длина экватора больше, чем 10;
5) хордой окружности, длина которой больше, чем 3.

Тест 9. Длина отрезка

Отрезок больше, чем 1, если:
1) он является высотой, проведенной на гипотенузу в прямоугольном треугольнике с катетами 3 и 4;
2) он является наибольшей высотой в треугольнике со сторонами 0,9; 1; 1,1;
3) он является высотой в прямоугольной трапеции (т. е. с углом 90°), в которой основания равны 2 и 3, а большая боковая сторона равна 1;
4) он является высотой правильной треугольной пирамиды, в которой ребро основания равно 1, а угол, под которым это ребро видно из вершины пирамиды, равен 60°;
5) он является наибольшим ребром прямоугольного параллелепипеда, в котором диагональ равна 2.

Тест 10. Длина отрезка

Отрезок a длиннее отрезка b, если:
1) a — медиана треугольника, b — биссектриса треугольника, причем они проведены из одной вершины;

2) a — большая сторона параллелограмма, b — меньшая диагональ параллелограмма;
3) a — высота правильной треугольной пирамиды, b — ребро основания этой пирамиды, причем ее боковое ребро равно 1;
4) b — диаметр шара, a — диаметр сечения этого шара;
5) a — диаметр основания конуса, b — образующая его поверхности.
При этом осевым сечением конуса является треугольник с одним из углов 20 градусов.

Тест 11. Длина отрезка

При $a > 1$:
1) радиус окружности, описанной около треугольника со сторонами 1, 1, a больше, чем 0,5;
2) радиус окружности, вписанной в прямоугольный треугольник с катетами 1 и a, больше, чем 0,5;
3) радиус окружности, описанной около трапеции, у которой основание равно a, а остальные стороны равны 1, больше, чем 0,5;
4) высота правильной треугольной пирамиды с боковым ребром 1 и ребром основания a, больше, чем 0,5;
5) расстояние между любыми параллельными ребрами куба с ребром a не меньше, чем 1.

Тест 12. Сравнение отрезков

1) Одна сторона треугольника равна 20, вторая сторона этого треугольника равна 10. Тогда третья сторона x этого треугольника удовлетворяет неравенствам $5 < x < 35$.
2) Сторона a треугольника удовлетворяет неравенствам $10 < a < 20$, сторона b этого треугольника удовлетворяет неравенствам $100 < b < 200$. Тогда третья сторона x этого треугольника удовлетворяет неравенствам $90 < x < 220$.
3) A, B, C, D — четыре точки в пространстве. $AB = 2$, $BC = 3$, $CD = 4$, $DA = 1$. Тогда $AC < BD$.
4) Измерения прямоугольного параллелепипеда равны 1, 2, 3. Тогда его диагональ меньше 6.
5) Гипотенуза прямоугольного треугольника равна 10, один из катетов в два раза больше другого. Тогда меньший катет больше, чем 4.

Тест 13. Равенство углов

Два угла равны, если они являются:
1) углами, смежными с двумя вертикальными;
2) углами равнобедренного треугольника;
3) противоположными углами параллелограмма;
4) вписанными в одну и ту же окружность;
5) двугранными углами в правильной треугольной пирамиде.

Тест 14. Сравнение углов

Угол является прямым, если:
1) он равен своему смежному;
2) он является одним из углов треугольника со сторонами 5, 6, 7;
3) он является углом между диагоналями ромба;
4) он является углом между диагоналями куба;
5) его вершина находится в вершине A куба, а стороны проходят через концы диагонали куба, не выходящей из точки A.

Тест 15. Площадь

Существует угол φ, при котором площадь S равна 1, если:
1) φ — это угол ABC в треугольнике ABC, в котором $AB = 100$, $BC = 200$, S — площадь этого треугольника;
2) φ — это угол BAC в треугольнике ABC, в котором $AB = 1$, $\angle ABC = 10^\circ$, S — площадь этого треугольника;

3) φ — это угол ABC в трапеции $ABCD$, в которой $AB = BC = CD$, а большее основание AD меньше 1, S — площадь этой трапеции;
4) φ — это угол правильного многоугольника, вписанного в окружность радиуса 1, S — площадь этого правильного многоугольника;
5) φ — это плоский угол при вершине правильной треугольной пирамиды, в которой боковое ребро равно 1, S — площадь поверхности этой пирамиды.

Тест 16. Подобие треугольников

Треугольники $A_1B_1C_1$ и $A_2B_2C_2$ подобны, если:
1) $\angle A_1 = \angle A_2$, $\angle B_1 = \angle B_2$;
2) $\frac{a_1}{b_2} = \frac{b_1}{c_2} = \frac{c_1}{a_2}$;
3) $A_1B_1 \parallel A_2B_2$, $B_1C_1 \parallel B_2C_2$, $A_1C_1 \parallel A_2C_2$;
4) они являются параллельными треугольными сечениями правильного тетраэдра;
5) они являются сечениями куба плоскостями, перпендикулярными одной и той же диагонали куба.

Тест 17. Линейные операции с векторами

Верно каждое из равенств:
1) $\overrightarrow{BO} = 0{,}5(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})$, если дан треугольник ABC и в точке O пересекаются его медианы;
2) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{OC}$, если дан треугольник ABC и в точке O пересекаются его медианы;
3) $\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BD}$, если дан тетраэдр $ABCD$;
4) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BD}$, если дан тетраэдр $ABCD$;
5) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$, если дан тетраэдр $ABCD$.

Предметный указатель

Планиметрические понятия

Аксиома 8

Биссектриса треугольника 57
— угла 36
Боковая сторона равнобедренного треугольника 58
— — трапеции 97

Вектор (векторная величина) 152
— единичный 167
— нулевой 160
— противоположный 160
Векторы коллинеарные (параллельные) 153
— противоположно направленные 154
— сонаправленные 154
Величина 21
— угла 39
Вершина многоугольника 86
— треугольника 44
— угла 28
Взаимно обратные утверждения 56
Внутренняя точка отрезка 12
— — угла 29
Высота параллелограмма 102
— трапеции 98
— треугольника 57
Вычитание векторов 160

Геометрическое место точек 118
Гипотенуза 45
Гомотетия 237
Градусная мера дуги 117
— — угла 39

Диагональ многоугольника 87
Диаметр окружности (круга) 26, 174
Диаметрально противоположные точки 26
Длина вектора 153
— кривой линии 189
— окружности 189
— отрезка 21
Доказательство 44
— способом от противного 69
Дуга окружности (круга) 26
Заключение теоремы 46

Касание прямой и окружности 175
Катет 45
Квадрат 103
Квадратный корень 112
Классификация 45
Координаты вектора 207
Косинус угла 137
Котангенс 148
Коэффициент подобия 236
Круг 26

Лемма 96
Ломаная 86
—, вписанная в кривую 188
Луч 13

Масштаб 242
Медиана треугольника 57
Метод координат 202
Многоугольник 86
— вписанный 180
— выпуклый 87
— описанный 181
— правильный 184
Множество точек 118
Модуль (длина) вектора 152

Наклонная к прямой 115
Направленный отрезок 153
Начало луча 13
Неравенство треугольника 116

Обобщенная теорема Пифагора 142
Объединение фигур 7
Окружность 26
—, вписанная в многоугольник 180
—, описанная около многоугольника 181
Основание равнобедренного треугольника 58

Основание трапеции 97
Ось симметрии 60
Откладывание вектора 156
— отрезка 18
— угла 31
Отношение отрезков 123
Отражение от прямой 224

Отрезок 12
— единичный 21

Параллелограмм 100
Параллельные отрезки 66
Параллельный перенос 222
Пересечение фигур 7
Периметр многоугольника 24
— треугольника 24
Перпендикуляр 39
Планиметрия 3
Площадь круга 191
— многоугольной фигуры 93, 191
— параллелограмма 102
— трапеции 98
— треугольника 96
Поворот 225
Подобие 236
Подобные фигуры 236
Полоса 75
Полукруг 27
Полуокружность 27
Полуплоскость 44
Правило параллелограмма 159
— треугольника 158
Преобразование фигур 219
Прилежащие стороны и углы треугольника 45
Проекция вектора на ось 167
— наклонной к прямой 115
Произведение вектора на число 164
Противолежащие стороны и вершины (углы) треугольника 45
Прямая 14
Прямоугольник 74
Прямые параллельные 66, 69
— пересекающиеся 14, 69
— перпендикулярные 36

Равенство векторов 154
— треугольников 46
— отрезков 17
— углов 30
— фигур 221
Равновеликие фигуры 93
Радиус окружности (круга) 26
Разность векторов 160
— отрезков 19
— углов 35
Расстояние между точками 21
— от точки до фигуры 117
Решение треугольников 123
Ромб 103

Сегмент круга 27
Сектор круга 27
Секущая прямая 66
Серединный перпендикуляр 55
Симметрия (симметричность) 60
— осевая (относительно прямой) 60, 223
— поворотная 232
— центральная (относительно точки) 226
Синус угла 124
Скаляр (скалярная величина) 152
Скалярное произведение векторов 215
Скалярный квадрат вектора 215
Скользящее отражение 222
Сложение векторов 158
— отрезков 18
— углов 35
Средняя линия трапеции 146
— — треугольника 143
Стереометрия 3
Сторона многоугольника 86
— треугольника 44
— угла 28
Сумма векторов 158
— отрезков 18
— углов 35

Тангенс угла 147
Теорема 44
— синусов 131
— Пифагора 110
Точка 12
— пересечения прямых 14
Трапеция 97
— равнобедренная (равнобокая) 97
Треугольник 44
— остроугольный 45
— прямоугольный 45
— равнобедренный 58
— равносторонний 58
— тупоугольный 45
Тригонометрия 123

Угол 28
— внешний треугольника 78
—, вписанный в окружность 177
— между векторами 166
— между отрезками 29
— многоугольника 86
— острый 35
— прямой 33
— развернутый 28
— треугольника 44
— тупой 35
— центральный 175

Углы вертикальные 36
— внутренние накрест лежащие 67
— внутренние односторонние 67
— дополнительные 139
— смежные 33
— соответственные 67
Умножение вектора на число 164
Уравнение окружности 201
— прямой 201
— фигуры 201
Условие теоремы 46
Утверждение, обратное данному 56

Фигура (геометрическая) 6

Характерное свойство фигуры 103
Хорда окружности (круга) 26
— фигуры 26
Центр окружности (круга) 26
— правильного многоугольника 184

Численное значение величины угла 39
— — длины отрезка 21
— — площади 93

Ширина полосы 75

Элементы треугольника 44
Элементы многоугольника 86

Стереометрические понятия

Боковая грань пирамиды 89
— — призмы 104
Боковая поверхность конуса 197
— — цилиндра 196
Боковое ребро пирамиды 90
— — призмы 104
Большая окружность на сфере 195

Векторы в пространстве 211
Вершина пирамиды 89
Винтовое движение (винт) 229
Высота конуса 197
— пирамиды 118
— цилиндра 196

Движения в пространстве 228
Декартовы координаты в пространстве 203
Двугранный угол 40
Диагонали параллелепипеда 43

Зеркальная симметрия 228
Зеркальный поворот 229

Касательная плоскость к сфере 196
Конус 197
Координатное пространство 204

Линейный угол двугранного угла 41

Наклонная к плоскости 118
Неподвижная точка преобразования 228

Образующая конуса 197
— цилиндра 196
Осевое сечение конуса 197
— — цилиндра 196
Основание конуса 197
— пирамиды 89
— призмы 104
— цилиндра 196
Ось аппликат 203
— конуса 197
— цилиндра 196

Параллелепипед 104
Перпендикуляр к плоскости 118
Перпендикулярность прямой и плоскости 61
Пирамида 89
— n-угольная 89
— правильная 89
— — треугольная 89
Площадь поверхности многогранника 93
Поворот вокруг прямой 229
Правильные многогранники 187
Призма 104
— n-угольная 104
— наклонная 104
— правильная 104
— прямая 104
Проекция наклонной на плоскость 118

Симметрия относительно плоскости 228
Скользящая симметрия 229
Скрещивающиеся прямые 69
Сфера 195

Тетраэдр 89
— правильный 89

Угол между наклонной и плоскостью 118

Цилиндр 196

Шар 195

Оглавление

7 класс

Глава I **Начала геометрии**

§ 1. О чем и зачем геометрия . . . 6
§ 2. Отрезок. Луч. Прямая . . . 12
§ 3. Действия над отрезками . . . 17
§ 4. Длина отрезка. Расстояние . . . 21
§ 5. Окружность и круг . . . 25
§ 6. Углы . . . 28
§ 7. Действия над углами . . . 34
§ 8. Величина угла . . . 39
Задачи к главе I . . . 42

Глава II **Треугольники**

§ 9. Равенство треугольников . . . 47
§ 10. Признаки равенства треугольников . . . 49
§ 11. Серединный перпендикуляр . . . 54
§ 12. Равнобедренный треугольник . . . 58
Задачи к главе II . . . 64

Глава III **Параллельность**

§ 13. Параллельные прямые . . . 66
§ 14. Аксиома параллельности . . . 72
§ 15. Сумма углов треугольника . . . 78
Задачи к главе III . . . 82
Итоги 7 класса . . . 84

8 класс

Глава IV **Площади многоугольных фигур**

§ 16. Многоугольники и многоугольные фигуры . . . 86
§ 17. Площадь многоугольной фигуры . . . 93
§ 18. Площадь треугольника и трапеции . . . 96
§ 19. Параллелограмм и его площадь . . . 100
Задачи к главе IV . . . 107

Глава V **Метрические соотношения в треугольнике**

§ 20. Теорема Пифагора . . . 110
§ 21. Применения теоремы Пифагора . . . 115
§ 22. Синус . . . 123
§ 23. Применения синуса . . . 131
§ 24. Косинус . . . 136
§ 25. Применения косинуса . . . 142
§ 26. Тангенс. Котангенс . . . 147
Задачи к главе V . . . 151

Глава VI **Векторы**

§ 27. Векторы . . . 152
§ 28. Сложение векторов . . . 158
§ 29. Умножение вектора на число . . . 164
§ 30. Проекция вектора на ось . . . 166
Итоги 8 класса . . . 172

9 класс

Глава VII Фигуры вращения

§ 31 Хорды и касательные 174
§ 32 Вписанные и описанные окружности 180
§ 33 Правильные многоугольники 184
§ 34 Длина окружности и площадь круга 188
§ 35 Сфера и шар. Цилиндр и конус 195
Задачи к главе VII 198

Глава VIII Другие методы геометрии

§ 36 Метод координат 200
§ 37 Векторы и координаты 207
§ 38 Скалярное умножение 215
§ 39 Движения и равенство фигур 218
§ 40 Виды движений 222
§ 41 Симметрия фигур 232
§ 42 Подобие 236
Итоги 9 класса 246
Заключение 247
Ответы 255
Тесты 263
Предметный указатель 267

Учебное издание

Александров Александр Данилович
Вернер Алексей Леонидович
Рыжик Валерий Идельевич

ГЕОМЕТРИЯ

Учебник для 7—9 классов
общеобразовательных учреждений

Зав. редакцией *Т. А. Бурмистрова*
Редакторы *Н. И. Никитина, Т. А. Бурмистрова*
Младший редактор *Н. В. Сидельковская*
Художники *Т. В. Делягина, Е. В. Соганова*
Художественный редактор *А. В. Крикунов*
Технический редактор *Е. Н. Зелянина*
Корректоры *О. Н. Леонова, Н. А. Смирнова*

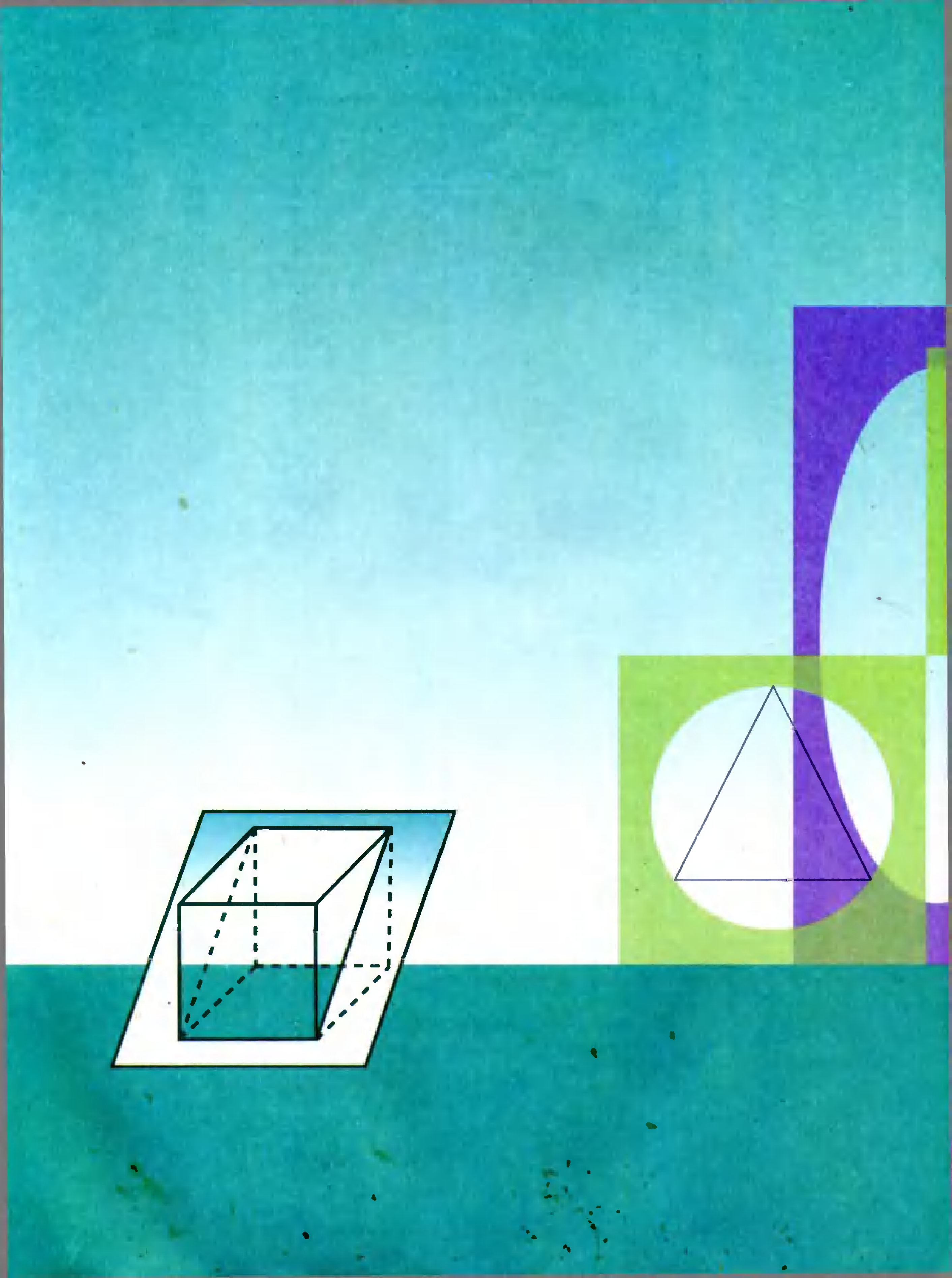
Налоговая льгота — Общероссийский классификатор продукции ОК 005-93—953000. Изд. лиц. Серия ИД № 05824 от 12.09.01. Сдано в набор 24.04.03. Подписано в печать 15.07.03. Формат $84\times108^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура «Школьная». Печать офсетная. Усл. печ. л. 28,56+0,62 форз. Усл. кр.-отт. 59,85. Уч.-изд. л. 23,24+0,89 форз. Тираж 10 000 экз. Заказ № 6487.

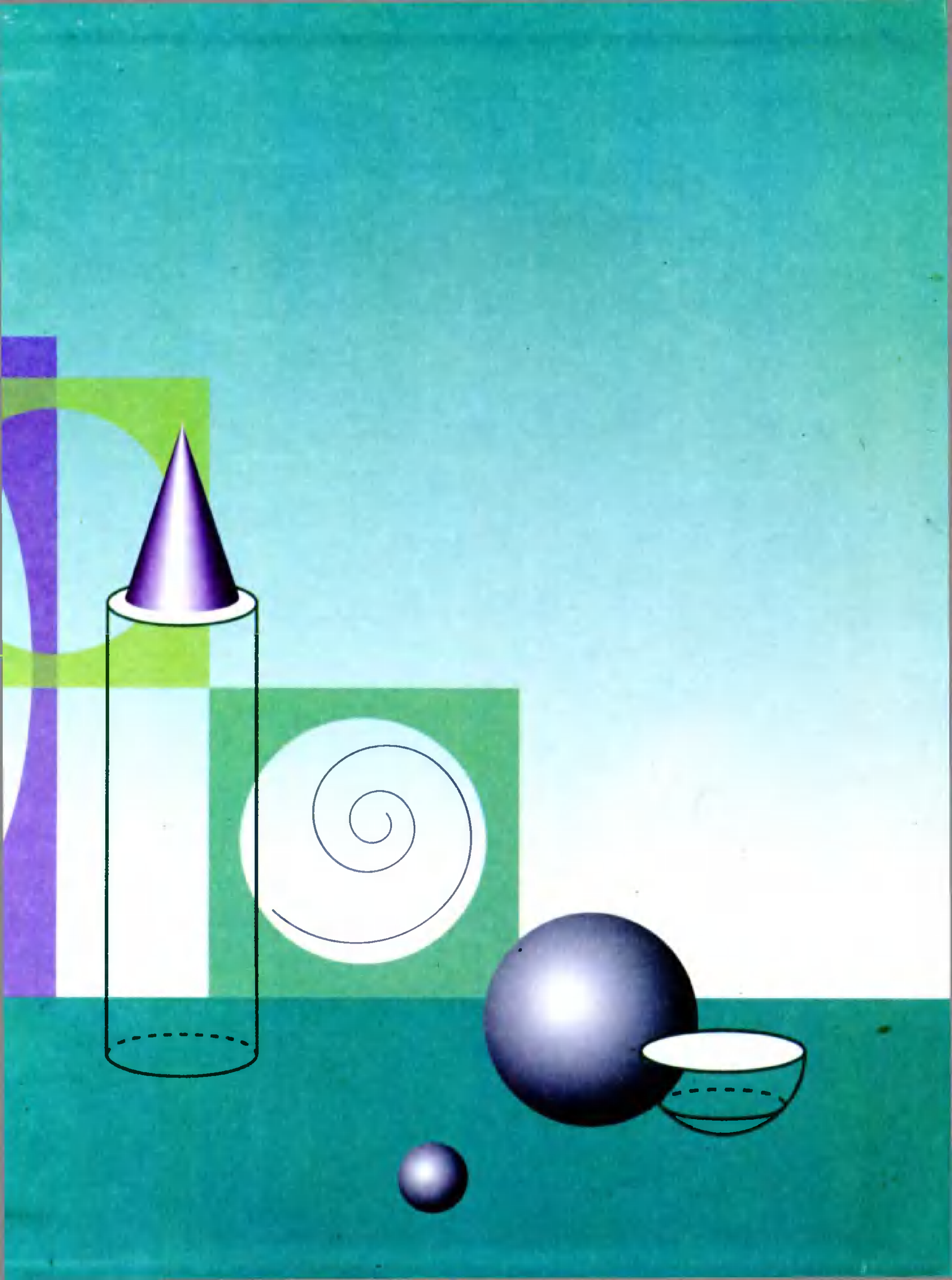
Федеральное государственное унитарное предприятие ордена Трудового Красного Знамени «Издательство «Просвещение» Министерства Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций. 127521, Москва, 3-й проезд Марьиной рощи, 41.

Федеральное государственное унитарное предприятие Смоленский полиграфический комбинат Министерства Российской Федерации по делам печати, телерадиовещания и средств массовых коммуникаций. 214020, г. Смоленск, ул. Смольянинова, 1.

Таблица тригонометрических функций

α°↓	sin α ↓	tg α ↓	ctg α ↓	cos α ↓	
0	0,0000	0,0000	—	1,000	90
1	0,0175	0,0175	57,3	1,000	89
2	0,0349	0,0349	28,6	0,999	88
3	0,0523	0,0524	19,1	0,999	87
4	0,0698	0,0699	14,3	0,998	86
5	0,0872	0,0875	11,4	0,996	85
6	0,1045	0,1051	9,51	0,995	84
7	0,1219	0,1228	8,14	0,993	83
8	0,139	0,141	7,11	0,990	82
9	0,156	0,158	6,31	0,988	81
10	0,174	0,176	5,67	0,985	80
11	0,191	0,194	5,145	0,982	79
12	0,208	0,213	4,705	0,978	78
13	0,225	0,231	4,331	0,974	77
14	0,242	0,249	4,011	0,970	76
15	0,259	0,268	3,732	0,966	75
16	0,276	0,287	3,487	0,961	74
17	0,292	0,306	3,271	0,956	73
18	0,309	0,325	3,078	0,951	72
19	0,326	0,344	2,90	0,946	71
20	0,342	0,364	2,747	0,940	70
21	0,358	0,384	2,605	0,934	69
22	0,375	0,404	2,475	0,927	68
23	0,391	0,424	2,356	0,921	67
24	0,407	0,445	2,246	0,914	66
25	0,423	0,466	2,145	0,906	65
26	0,438	0,488	2,050	0,899	64
27	0,454	0,510	1,963	0,891	63
28	0,469	0,532	1,881	0,883	62
29	0,485	0,554	1,804	0,875	61
30	0,500	0,577	1,732	0,866	60
31	0,515	0,601	1,664	0,857	59
32	0,530	0,625	1,600	0,848	58
33	0,545	0,649	1,540	0,839	57
34	0,559	0,675	1,483	0,829	56
35	0,574	0,700	1,428	0,819	55
36	0,588	0,727	1,376	0,809	54
37	0,602	0,754	1,327	0,799	53
38	0,616	0,781	1,280	0,788	52
39	0,629	0,810	1,235	0,777	51
40	0,643	0,839	1,192	0,766	50
41	0,656	0,869	1,150	0,755	49
42	0,669	0,900	1,111	0,743	48
43	0,682	0,933	1,072	0,731	47
44	0,695	0,966	1,036	0,719	46
45	0,707	1,000	1,000	0,707	45
	cos α ↑	ctg α ↑	tg α ↑	sin α ↑	α° ↑





Учебно-методический комплект включает:

А. Д. Александров, А. Л. Вернер, В. И. Рыжик
Геометрия
Учебник для 7-9 классов

А. П. Евстафьева, Ю. А. Мамаджанова
Геометрия. Рабочая тетрадь
для 7, 8 и 9 классов

ISBN 5-09-011422-6

9 785090 114226

·Просвещение·